

Геометрия, 10 «В», домашнее задание 22 → 28 апреля.

1 Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда вписанная в него сфера касается каждой грани в её центре описанной окружности.

2 Все двугранные углы трёхгранного угла одинаковы и равны  $\varphi$ . Докажите, что все плоские углы этого трёхгранного угла также равны, найдите, чему именно и укажите, при каких значениях  $\varphi$  такой угол существует.

3 В трёхгранном угле  $PABC$  плоские углы, противолежащие рёбрам  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ , соответственно равны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Каков угол ребро  $PA$  составляет с плоскостью  $BPC$ ?

4 На ребре двугранного угла величиной  $60^\circ$  выбрана точка  $A$ , а в его гранях проведены отрезки  $AB$  и  $AC$  так, что треугольник  $ABC$  равносторонний. Известно, что отрезок  $AB$  образует с ребром угол  $45^\circ$ . Какой (острый) угол с ребром составляет отрезок  $AC$ ?

5 Докажите, что если четыре высоты равногранного тетраэдра рассматривать как векторы (направленные от вершины к грани), то сумма этих векторов равна  $\vec{0}$ . (Подсказка. Можно вписать тетраэдр в прямоугольную коробку, ввести координаты и для каждой грани записать (нормированный) нормальный вектор.)

6 Найдутся ли такие четырёхугольная и треугольная пирамиды, что четыре трёхгранных угла четырёхугольной пирамиды соответственно равны четырём трёхгранным углам треугольной? (Подсказка. Воспользуйтесь неравенствами треугольника для трёхгранного угла.)

7 [Задача из материалов для подготовки к ЕГЭ.] В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AL$  и медиана  $BM$  перпендикулярны друг другу.

а) Докажите, что  $AC = 2 \cdot AB$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = \sqrt{3}$  и  $ML = 1$ .

8\* [Необязательное задание. Планиметрия – олимпиадная задача. Европейская олимпиада для девушек, 2023, упрощение.] Касательные к описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ , проведённые в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $D$ . Точки  $P$  и  $Q$  – проекции  $D$  на прямые  $AC$  и  $BC$ . Докажите, что середина стороны  $AB$  – ортоцентр треугольника  $PQC$ .