

Геометрия, 10 «В», домашнее задание 22 → 28 апреля.

1 Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда вписанная в него сфера касается каждой грани в её центре описанной окружности.

2 Все двугранные углы трёхгранного угла одинаковы и равны φ . Докажите, что все плоские углы этого трёхгранного угла также равны, найдите, чему именно и укажите, при каких значениях φ такой угол существует.

3 В трёхгранном угле $PABC$ плоские углы, противолежащие рёбрам PA , PB , PC , соответственно равны α , β и γ . Каков угол ребро PA составляет с плоскостью BPC ?

4 На ребре двугранного угла величиной 60° выбрана точка A , а в его гранях проведены отрезки AB и AC так, что треугольник ABC равносторонний. Известно, что отрезок AB образует с ребром угол 45° . Какой (острый) угол с ребром составляет отрезок AC ?

5 Докажите, что если четыре высоты равногранного тетраэдра рассматривать как векторы (направленные от вершины к грани), то сумма этих векторов равна $\vec{0}$. (Подсказка. Можно вписать тетраэдр в прямоугольную коробку, ввести координаты и для каждой грани записать (нормированный) нормальный вектор.)

6 Найдутся ли такие четырёхугольная и треугольная пирамиды, что четыре трёхгранных угла четырёхугольной пирамиды соответственно равны четырём трёхгранным углам треугольной? (Подсказка. Воспользуйтесь неравенствами треугольника для трёхгранного угла.)

7 [Задача из материалов для подготовки к ЕГЭ.] В треугольнике ABC биссектриса AL и медиана BM перпендикулярны друг другу.

а) Докажите, что $AC = 2 \cdot AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = \sqrt{3}$ и $ML = 1$.

8* [Необязательное задание. Планиметрия – олимпиадная задача. Европейская олимпиада для девушек, 2023, упрощение.] Касательные к описанной окружности остроугольного треугольника ABC , проведённые в точках A и B , пересекаются в точке D . Точки P и Q – проекции D на прямые AC и BC . Докажите, что середина стороны AB – ортоцентр треугольника PQC .