Геометрия, 10 «В», домашнее задание 01 $\longrightarrow$ 07 апреля.

$\boxed{1.}$ Докажите, что расстояние от центра любого тетраэдра до его грани равно четверти высоты, опущенной на эту грань. Выведите отсюда, что у равногранного третраэдра центр совпадает с инцентром.

$\boxed{2.}$ Какая доля бимедианы правильного тетраэдра лежит внутри вписанной сферы?

$\boxed{3.}$ Развёртка тетрадра – единичный квадрат. Найдите длины всех высот этого тетраэдра.

$\boxed{4.}$ Несложно доказать, что в любую правильную пирамиду можно вписать сферу и вокруг любой правильной пирамиды сферу можно описать. Найдите радиусы этих сфер для четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны 2.

$\boxed{5.}$ Прямые заданы уравнениями $(2t\,;\,3-t\,;\,t+1)$ и $(1+4t\,;\,-t\,;\,3t-2)$. Напишите уравнение их общего перпендикуляра.

$\boxed{6.}$ Любые ли три положительных числа a, b, c могут оказаться рёбрами равногранного тетраэдра? Конечно, нет – как минимум нужно, чтобы из них составлялся треугольник (нужно $a+b>c$, $a+c>b$, $c+b>a$). Но достаточно ли этого? Оказывается, нет. Докажите, что a, b, c будут рёбрами равногранного тетраэдра тогда и только тогда, когда из них составляется **остроугольный** треугольник.

$\boxed{7}$ [ЕГЭ, 2023 г.] Окружность с центром O вписана в треугольник ABC. Касательная к окружности пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно.
а) Докажите, что сумма углов AOD и BOE равна $180°$.
б) Найдите DE, если $AC=BC$, радиус окружности равен 3, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right)=\frac{5\sqrt{3}}{11}$, а разность углов AOD и BOE равна $60°$.

$\boxed{8^*}$ [*Необязательное задание. Планиметрия – олимпиадная задача.* USAMO, 2023 г.] Пусть P – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на медиану AM остроугольного треугольника ABC. Описанная окружность треугольника ABP пересекает прямую BC повторно в точке Q. Точка N – середина AQ. Докажите, что $NB=NC$.