

## Предел функции

### Предел функции на бесконечности

Меня ведь не рубли на гонку завели —  
 Меня просили: "Миг не проворонь ты!  
 Узнай, а есть предел — там, на краю земли?  
 И можно ли раздвинуть горизонты?"

В. Высоцкий

82. Найдите предел последовательности  $(a_n) = \frac{2n+4}{n}$ . Что это означает в соответствии с определением предела последовательности?

83. а) Постройте график функции  $f(x) = \frac{2x+4}{x}$ . Назовите число, близкое к значениям функции при больших значениях аргумента.

б) Укажите такое число  $M_1$ , что при всех  $x > M_1$  выполняется неравенство  $|f(x) - 2| < 0,1$ .

в) Укажите такое число  $M_2$ , что при всех  $x > M_2$  выполняется неравенство  $|f(x) - 2| < 0,001$ .

г) Докажите, что  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M)(\forall x > M)(|f(x) - 2| < \varepsilon)$ .

*Определение.* Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M)(\forall x > M)(|f(x) - b| < \varepsilon).$$

Пишут:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ .

84. Сформулируйте определения предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow \infty$ .

85. СК Докажите, что функция не может иметь двух различных пределов при  $x \rightarrow +\infty$ .

### Два определения предела функции в точке

*Определение.* *Проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью* точки  $a$  называется объединение интервалов  $(a - \varepsilon; a) \cup (a; a + \varepsilon)$ .

Если во всех точках какой-нибудь проколотой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  выполняется некоторое свойство функции, то говорят, что это свойство выполняется *вблизи* точки  $a$ .

86. Пусть  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .

а) Определите знак функции  $f(x)$  вблизи точки 2. Означает ли это, что  $f(2) > 0$ ?

б) Найдите с точностью до 0,000001, чему равно значение  $f(x)$  вблизи точки 2. Означает ли это, что  $f(2) = 4$ ?

В подобной ситуации говорят, что  $f(x) \rightarrow 4$  при  $x \rightarrow 2$ , и пишут  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ .

*Определение 1.* Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  вблизи точки  $a$  выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

*Определение 2.* Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  *в точке*  $a$ , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $b$  найдется такая проколотая  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , что если  $x$  находится в ней, то  $f(x)$  находится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $b$ .

*Определение 3.* Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon))((0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon)).$$

Ясно, что все три определения на самом деле разные формы одного и того же. Его называют определением *по Коши*.

87. Докажите, что: а)  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ .

88. Пусть дана функция  $f(x)$ . Рассмотрим множество сходящихся к  $a = 3$  последовательностей  $(x_n)$ , члены которых принадлежат области определения  $f(x)$ . Верно ли, что все соответствующие им последовательности  $f(x_n)$  сходятся?

а)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ ; б)  $f(x) = [x]$ ; в)  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3}$ ; г)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$ .

89. Докажите, что если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , то для любой сходящейся к  $a$  последовательности  $(x_n)$ , члены которой принадлежат области определения  $f(x)$  и отличны от  $a$ , последовательность  $(f(x_n))$  сходится к  $b$ .

90. СК Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Две последние задачи доказывают корректность *второго определения предела функции в точке*, предложенного немецким математиком *Генрихом Гейне*:

**Определение предела функции по Гейне.** Говорят, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , если для любой сходящейся к  $a$  последовательности  $(x_n)$ , члены которой принадлежат области определения  $f(x)$  и отличны от  $a$ , последовательность  $(f(x_n))$  сходится к  $b$ .

91. Пусть дана функция  $f(x)$ . Рассмотрим множество сходящихся к  $a$  последовательностей  $(x_n)$ , члены которых принадлежат области определения  $f(x)$ . Докажите, что если все соответствующие им последовательности  $f(x_n)$  сходятся, то они сходятся к одному и тому же пределу.
92. [СК] Докажите, что функция не может иметь двух различных пределов при  $x \rightarrow a$ , пользуясь определением: а) по Коши; б) по Гейне.
93. [СК] Дайте определение предела функции на бесконечности по Гейне.

[СК] **Теорема о предельном переходе.** Если существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , и существует проколота окрестность точки  $a$ , в которой выполнено неравенство  $f(x) \leq g(x)$ , то  $A \leq B$ .

[СК] **Теорема "о двух милиционерах".** Если существует проколота окрестность точки  $a$ , в которой выполнено неравенство  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ , и  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  существует и равен  $b$ .

### Арифметические свойства пределов.

**Теорема.** Пусть существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ . Тогда:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = a + b$ . (предел суммы равен сумме пределов)
  - 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = ab$ . (предел произведения равен произведению пределов)
  - 3) если  $b \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ . (предел частного равен частному пределов)
  - 4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . (постоянный множитель можно выносить за знак предела)
94. Сформулируйте и докажите арифметические свойства предела функции на бесконечности.
95. а) Докажите, что предел многочлена в точке  $a$  равен его значению в этой точке.  
 б) Найдите  $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 5x^2 - 12)$ .
96. Вычислите пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2 + 5x + 3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ , где  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
97. Вычислите: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x - 6}{2x^3 - 8x^2 + 12x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 4x + 10}{2x^4 - 5x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^2)^{10}}{(1+2x^{10})^2}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+3x^{11})^3}{(1+8x^5)^7}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x)$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+4})$

### Домашнее задание

98. Верно ли равенство:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [2x] = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x]$ ? Почему? Не противоречит ли этот пример тому, что постоянный множитель можно выносить за знак предела?
99. Докажите, пользуясь только определением по Коши, что:  
 а)  $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 = 9$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 3) = 5$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{5}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 3) = 4$ .
100. Вычислите пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - 3x^2 + 2x - 4)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5 + 2x + x^2}{x^3 + 3x^2 + 1}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right)$ .
101. Вычислите: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x - 6}{x^3 + 15x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 4x + 10}{x^4 - 5}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$ .