

Обратные тригонометрические функции

- Обратимы ли тригонометрические функции? Как можно уменьшить область определения каждой из них, чтобы функция стала обратимой?

Определение 1. Пусть $-1 \leq y \leq 1$. Тогда **арксинусом** y называется такое число x , что $\sin x = y$ и $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
Запись: $x = \arcsin y$.

Определение 2. Пусть $-1 \leq y \leq 1$. Тогда **арккосинусом** y называется такое число x , что $\cos x = y$ и $0 \leq x \leq \pi$.
Запись: $x = \arccos y$.

Определение 3. **Арктангенсом** y называется такое число x , что $\operatorname{tg} x = y$ и $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
Запись: $x = \operatorname{arctg} y$.

Определение 4. **Арккотангенсом** y называется такое число x , что $\operatorname{ctg} x = y$ и $0 < x < \pi$.
Запись: $x = \operatorname{arctg} y$.
- Постройте графики функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arctg} x$. Укажите область определения и область значений каждой функции.
- Вычислите: а) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; в) $\operatorname{arctg} 0$; г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}})$.
- При каких t верно равенство: а) $\cos(\operatorname{arccos} t) = t$; б) $\arccos(\cos t) = t$; в) $\sin(\arcsin t) = t$; г) $\arcsin(\sin t) = t$?
- При каких значениях x верно равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$?
- При каких значениях x верно равенство: а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$; б) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x$?
- Докажите тождество:
а) $\operatorname{tg}(|\operatorname{arctg} x|) = |x|$; б) $\operatorname{ctg}(|\operatorname{arctg} x|) = x$; в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$.
- Вычислите: а) $\arcsin(\sin 7)$; б) $\arcsin(\sin 10)$; в) $\arccos(\cos 5)$.
- Докажите тождества:
а) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$; б) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$; в) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;
г) $\operatorname{arctg}(-a) = \pi - \operatorname{arctg} a$.
- Вычислите: а) $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $\cos(\arcsin \frac{1}{3})$; в) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$; г) $\sin(\arccos(\frac{3}{5}))$.
- Упростите выражение: а) $\cos(\arcsin x)$; б) $\sin(\arccos x)$.
- Докажите, что:
а) если $0 \leq x \leq 1$, то $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$;
б) если $0 \leq x < 1$, то $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- Докажите тождество: а) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Вычислите:
а) $\operatorname{tg}(\arccos 1 - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}})$; г) $\sin(\pi - \arcsin \frac{2}{5})$; ж) $\cos(\arcsin \frac{5}{13})$;
б) $\cos(\operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{3}} + \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$; д) $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg} 7)$; з) $\sin(\operatorname{arctg} 0,25)$;
в) $\cos(\pi + \arccos(-\frac{2}{3}))$; е) $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg}(-5))$; и) $\operatorname{tg}(\arccos \frac{1}{3})$.