

**Тригонометрия — 2****Формулы приведения**46. а) Какое движение переводит точку  $P_\alpha$  в точку  $P_{\pi+\alpha}$ ?

б) Докажите формулы

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha.$$

47. а) Какое движение переводит точку  $P_\alpha$  в точку  $P_{\pi-\alpha}$ ?

б) Докажите формулы

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

48. а) Какое движение переводит точку  $P_\alpha$  в точку  $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ ?

б) Докажите формулы

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha.$$

49. а) Какое движение переводит точку  $P_\alpha$  в точку  $P_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ ?

б) Докажите формулы

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Формулы, полученные в 4 последних задачах, и аналогичные им называются формулами приведения. Они позволяют привести тригонометрическую функцию от любого аргумента к функции от аргумента, находящегося в 1 четверти тригонометрического круга (и даже в ее первой половине). Пользуясь периодичностью тригонометрических функций, можно продолжать ряд формул приведения сколь угодно долго. Чтобы не учить много отдельных формул, используют мнемоническое правило:

1) Пусть в левой части формулы стоит функция от  $\alpha + \phi$ ,  $\alpha - \phi$  или  $\phi - \alpha$ , где  $\phi = \frac{\pi n}{2}$ . Если  $\pi$  укладывается в  $\phi$  целое число раз (при этом  $\alpha$  откладывается от оси  $Ox$ ), то название функции не меняется. Если  $\pi$  укладывается в  $\phi$  "полуцелое" число раз ( $\alpha$  откладывается от оси  $Oy$ ), то название функции меняется на кофункцию (синус на косинус и обратно, тангенс на котангенс и обратно)

2) При определении знака можно считать, что аргумент принадлежит первой четверти.

**Графики тригонометрических функций**

Исследуем каждую из тригонометрических функций по стандартному плану:

1) область определения и область значений функции

2) четность (нечетность)

3) периодичность (с указанием основного периода)

Благодаря (не)четности, периодичности и формулам  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ ,  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$  достаточно построить график каждой тригонометрической функции на отрезке  $[0; \frac{\pi}{2}]$ , а затем продолжить на всю ось. А для этого определить, возрастает или убывает функция на указанном отрезке и отметить контрольные точки.

4) нули функции

5) интервалы знакопостоянства

6) промежутки монотонности

7) наличие асимптот

График функции  $y = \sin x$  называется **синусоидой**, а график функции  $y = \operatorname{tg} x$  — **тангенсоидой**.

50. Докажите, что как геометрическая фигура график функции: а)  $y = \cos x$  равен синусоиде; б)  $y = \operatorname{ctg} x$  равен тангенсоиде.51. Постройте график функции (уравнения): а)  $y = 1 - \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$ ; б)  $y = 2 \sin(\frac{\pi}{6} - x)$ ; в)  $y = 2 \sin(\frac{\pi}{6} - |x|)$ ; г)  $y = 2 \sin|\frac{\pi}{6} - x|$ ; д)  $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ; е)  $|y| = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ; ж)  $y = \operatorname{ctg}(\frac{x}{2})$ .52. Определите знак разности: а)  $\operatorname{ctg}(7\frac{3}{14}\pi) - \operatorname{ctg}(9\frac{8}{27}\pi)$ ; б)  $\operatorname{tg}(7\frac{3}{14}\pi) - \operatorname{ctg}(9\frac{8}{27}\pi)$ .**Домашнее задание**53. Постройте график функции: а)  $y = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$ ; б)  $y = |1 - 2 \sin(x + \frac{\pi}{4})|$ ; в)  $y = \cos(|2x| - \frac{2\pi}{3})$ ;  $y = \operatorname{ctg}|\frac{\pi}{6} - x|$ .54. Сравните числа: а)  $\cos \frac{19\pi}{9}$  и  $\cos(-\frac{13\pi}{6})$ ; б)  $\sin \frac{17\pi}{5}$  и  $\cos(-\frac{6\pi}{7})$ ; в)  $\sin 7$  и  $\cos 7$ .

55. \* Возьмите цилиндр (например, свечу или сосиску), намотайте на него лист бумаги в несколько слоев и аккуратно разрежьте все это острым ножом наискосок. Разверните бумагу. Докажите, что линия разреза является синусоидой.
56. Две арифметические прогрессии содержат по 1001 членов каждая. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой и равно 4. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй равно 2. Найдите отношение разностей этих прогрессий и приведите пример таких прогрессий.
57. \* Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые её несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?

*Подсказка.* Один из примеров строится на основе прогрессии 3, 5, 7, ...