Логарифм и его свойства

Определение логарифма. Логарифмическая функция

Показательные уравнения из предыдущего листка чудесным образом имели рациональные решения. А всегда ли имеет решение уравнение $a^x = b$?

Определение. Показатель степени x, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b, называется **логарифмом числа $b > 0$ по основанию a**. То есть $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$.

17. Пользуясь только определением логарифма, вычислите: а) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$; б) $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6}$.

Дать объекту определение — еще не значит убедиться в его существовании. Для каких a и b существует $\log_a b$?

Определение. Функция, обратная к показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется ***логарифмической*** и обозначается $y = \log_a x$.

Вместо $\log_e x$ принято писать $\ln x$, а вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$.

18. Постройте в одной системе координат графики функций:
а) $y = \log_2 x$ и $y = \log_5 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Из свойств показательной функции и теоремы об обратной функции вытекает, что функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена для всех $x > 0$ и является на этом множестве непрерывной и монотонной (возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$).

19. Сравните: а) $\log_3 \frac{1}{5}$ и $\log_3 \frac{1}{6}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $\log_{\frac{1}{3}} 6$.
20. а) Решите уравнение $3^x = 5$; б) Решите неравенства $3^x > 5$, $(0,3)^x > 5$.

Основное логарифмическое тождество. $\boxed{a^{\log_a c} = c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$.

21. Постройте график функции: а) $y = 2^{\log_2 x}$; б) $y = x^{\log_x 2}$.
22. Вычислите $9^{\log_3 5}$.

Арифметические свойства логарифмов

Теорема о логарифме произведения. $\boxed{\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Следствие. $\boxed{\log_a b^n = n \log_a b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема о логарифме частного. $\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

23. Вычислите: а) $\log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{11}(\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 7^{\log_7 4})^{2\log_5 11}$.
24. Постройте график функции: а) $y = \log_2 x^2$; б) $y = \log_2 x^3$.
25. Найдите x, если $\lg x^2 = 4\lg 3 + 2\lg 6 - \lg 9$.

Теорема о логарифме степени. $\boxed{\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $k \neq 0$.

Следствие. $\boxed{\log_{a^k} b^k = \log_a b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $k \neq 0$.

26. Вычислите $\log_4 8$.
27. Вычислите:
а) $(3\lg 2 - \lg 24) : (\lg 3 + \lg 27)$; в) $\log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{125} 9^3$; д) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} + \log_{0,2} \sqrt[3]{5}$;
б) $\log_9(\log_4 \sqrt[3]{4})$; г) $8^{\log_4 3 - \log_{16} 729}$; е) $\log_{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3}} 4^{\frac{1}{3}} - \log_3 \sqrt[3]{256}$.
28. Постройте график функции: а) $y = -\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - x\right) + \log_3 \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$; б) * $y = 0,5\log_2 \sin^2 x$.
29. Решите уравнения:
а) $4^{1+\lg x} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{2+\lg x^2} = 0$; б) $(2 \cdot 3^x + 5^x) \cdot (3^{x+1} + 2 \cdot 5^x) = 15^{x+1}$.

30. Решите неравенства:

а) $\sqrt{0,8^{x(x-3)}} < 0,64$; б) $\sqrt{\pi^x - \frac{5}{4}} \geqslant 10 - \pi^x$; в) $\frac{2\cdot 3^{x+3} - 5^{x+3}}{5\cdot 3^x - 3\cdot 5^x} < 1$.

31. * Решите уравнение $a \cdot 12^{|x|} = 2 - 12^{-|x|}$.

Домашнее задание

32. Решите уравнение: а) $\lg x = \frac{2}{3}\lg 24 - 2 + 1\frac{1}{3}\lg 3$; б) $\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \frac{11}{12}$.

33. Постройте график функции:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-2x)$; б) $y = 0,5^{\log_{0,5}(1-x^2)}$; в) $y = 2^{|\log_{0,5} x|}$; г) $y = \log_2 \log_2 x$.

34. Вычислите:

а) $\log_{4\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{32}$; б) $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$; в) $\log_5 75 + 3\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{3}$; г) $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} 14 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}} 56}{\log_{\sqrt{6}} 30 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 150}$.

35. Решите уравнения:

а) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 6\cdot 3^{2-x}$;

б) $9^{\sqrt{x}+0,5} - 39\cdot 3^{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}} + 12 = 0$;

в) $\dfrac{2\cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3$;

г) $2\cdot 15^x - 3^{x+2} - 4\cdot 5^{x+1} + 90 = 0$;

д) $8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$.

36. Решите неравенство

а) $\dfrac{11\cdot 3^{x-1} - 31}{4\cdot 9^x - 11\cdot 3^{x-1} - 5} \geqslant 5$;

б) $6^{x+2} \geqslant 4\cdot 7^{|x+1|}$;

в) $\sqrt{24,75 - 3^x} \geqslant 3^x - 9$;

г) $\left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)^{2x^2-x} > \left(\dfrac{x^4+1}{2x^2}\right)^{x-3}$.

37. Докажите, что для любой показательной функции $f(x) = a^x$ и любой геометрической прогрессии $b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots$ с положительными членами найдется такая арифметическая прогрессия $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$, что для всех n будет $f(x_n) = b_n$.

Логарифмирование. Свойства логарифмов с разными основаниями

38. Зная, что $0,3 < \lg 2 < 0,302$, найдите количество знаков в десятичной записи числа 2^{100}.

39. Решите уравнения: а) $7^{x+3}\cdot 3^{\frac{x+3}{x+2}} = 1$; б) $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$; в) $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$.

40. Докажите формулу $\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$.

Следствие 1 (формула перехода к другому основанию). $\boxed{\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$.

Следствие 2. $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

41. Пользуясь формулой перехода, вычислите логарифмы: а) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$; б) $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6}$.

42. Вычислите: а) $2^{\frac{3}{\log_{\sqrt[3]{6}} 2}}$; б) $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$.

Формула "обмена этажами". $\boxed{b^{\log_a c} = c^{\log_a b}}$

43. а) Вычислите $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; б) Вычислите еще раз $9^{\log_3 5}$.

44. Вычислите:

а) $5^{\frac{2\log_4 5 + 1}{2\log_4 5}}$;

б) $(3\sqrt{3})^{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2\sqrt[3]{2})}$;

в) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 16 \cdot \log_2 3)$;

г) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$;

д) $10^{\frac{\log_2 3\cdot\log_5 3}{\log_2 3 + \log_5 3}}$;

е)* $4^{\log_{0,25} 0,1} + \log_3 \dfrac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \log_{\frac{1}{9}} \dfrac{1}{12 + 2\sqrt{35}}$;

ж)* $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7)\log_7 2 - \log_2 7$.

45. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a} - 3^{\log_{27}(a^2+1)^3} - 2a}{7^{\log_{49} a^4} - 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt{a}} - 1}$; б) $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$.

46. Пусть $\log_a 27 = b$. Найдите $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$.

47. Пусть $\ln 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Найдите $\ln 56$.

48. Пусть $\log_2 3 = a$, $\log_5 3 = b$, $\log_7 3 = c$. Выразите $\log_{140} 9$ через a, b и c.

49. Пусть $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$. Докажите, что $ab + 5(a - b) = 1$.

50. Пусть $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$. Докажите, что тогда $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

51. * Вычислите $15 \lg_x(x-1)$, если $x^3 - 4x^2 + 3x = 1$.

52. Сравните: а) $\log_5 \sqrt{2}$ и $\log_{25} 3$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{2}$; в) $\log_3 10 + 4 \lg 3$ и 4.

53. а) Докажите, что при $a > 1$ выполняется неравенство $\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2)$.
б) Сравните $\log_{17} 19$ и $\log_{19} 20$.

54. Сравните $\log_{135} 675$ и $\log_{45} 75$.

Домашнее задание

55. Решите уравнение: а) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$ б) $9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^x$.

56. Прологарифмируйте равенство по основанию 10: $x = \dfrac{\sqrt[3]{100\sqrt{10a\sqrt[3]{0,1a^2}}}}{10\sqrt{0,1a}}$.

57. Постройте график функции $y = x^{\frac{\log_2 \log_2 x}{\log_2 x}}$.

58. Вычислите:

а) $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9}$; г) $\dfrac{\log_7 5 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 4 + 2\log_4 2}{2(2\log_3 2 + 3\log_{343} 7)}$;

б) $\dfrac{\log_5 12 - 2\log_5 2}{\log_5 18 + \log_5 0,5}$; д) $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$;

в) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; е) $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \sin 17^\circ)$.

59. Найдите значение выражения $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

60. Решите уравнение: а) $\log_x 2\sqrt[4]{2} = -\dfrac{3}{4}$; б) $\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x)\lg \dfrac{5}{3}$;
в) $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x = 1,5$; г) $\log_6 x \cdot \log_8 x = 9\log_6 8$.

61. Пусть $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Выразите $\log_{30} 8$ через a и b.

62. Пусть $\log_7 2 = a$, $\log_3 2 = b$. Найдите $\log_{63} 4$.

63. Пусть $\log_{ab} a = n$. Найдите $\log_{ab}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

64. Сравните: а) $\log_2 \dfrac{1}{7}$ и $\log_3 \dfrac{1}{7}$; б) $\log_5 130$ и $\log_3 25$.

65. Сравните: а) $\log_2 3 + \log_3 2$ и $\log_5 5\sqrt{5}$; б) $\log_7 10$ и $\log_{11} 13$; в) $5^{\log_3 7} + \sqrt{7}$ и $7^{\log_3 5} + 7^{\frac{1}{3}\log_7 19}$.

66. Упростите выражение $a^{\frac{2}{\log_b a}+1} \cdot b - 2a^{1+\log_a b} \cdot b^{1+\log_b a} + a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

67. Дано: $a^2 + b^2 = 7ab$, $a > 0$, $b > 0$. Докажите, что $\lg \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\lg a + \lg b)$.

68. Вычислите: а) $\lg\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg\operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 89^\circ$;
б) $\lg\operatorname{tg} 1^\circ + \lg\operatorname{tg} 2^\circ + \lg\operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \lg\operatorname{tg} 88^\circ + \lg\operatorname{tg} 89^\circ$.