

Показательная функция

Степень с действительным показателем

Будем считать известными определение и свойства степени с положительным основанием a и рациональным показателем r :

- 1) $a^r > 0$;
- 2) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;
- 3) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$;
- 4) Если $r_1 < r_2$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$ и $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$.

Попробуем понять, что такое $1,41^{\sqrt{2}}$. А что такое $\sqrt{2}$? Неотрицательное число, квадрат которого равен 2. А откуда следует, что такое число существует? Из аксиомы полноты.

Определение. Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множества $M = \{a^m | m \in \mathbb{Q}, m < x\}$ и $B = \{a^b | b \in \mathbb{Q}, b > x\}$. Разделяющее число множеств M и B называется степенью a^x .

Корректность определения неочевидна и доказывается с помощью аксиомы полноты. При этом доказывается и выполнение основных свойств степени с рациональным показателем для степени с действительным показателем. А также свойства показательной функции.

Определение и свойства показательной функции

Определение. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Функция $y = a^x$, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$, называется **показательной**.

Согласно определению степени с действительным показателем, $1^x = 1$ для всех действительных x . Поэтому рассматривать показательную функцию при $a = 1$ незачем.

Свойства показательной функции:

- 1) График показательной функции проходит через точку $(0; 1)$.
- 2) При $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает на \mathbb{R} .
- 3) Функция $y = a^x$ непрерывна в каждой точке числовой оси.
- 4) Областью значений показательной функции является множество всех положительных чисел.

1. Постройте график функции: а) $y = 2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Докажите, что они равны как геометрические фигуры.

2. Сравните числа: а) $(\sqrt{2})^{-0,3}$ и $(\sqrt{2})^{-0,2}$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\pi$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^e$.

3. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = -\frac{4}{x+2}$.

4. Как по графику функции $y = c \cdot a^x$ определить основание a и коэффициент c ?

Домашнее задание

5. Сравните числа: а) $0, 1^{-1,2}$ и $0, 1^{-1,3}$; б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

6. Постройте график функции: а) $y = 2^{1-x}$; б) $y = -0,2^{|x+2|}$; в) $y = 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

7. Постройте график функции $y = |2^x + 1| + |2^x - 1|$.

8. Решите неравенство $|x - 1| \geq 2, 5^x$.

9. Найдите наибольшее целочисленное значение функции $y = 10^{\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x + 0,5}$

Показательные уравнения

Так как показательная функция монотонна, то для всех $a > 0$, $a \neq 1$ верен переход

$$(a^{f(x)} = a^{g(x)}) \Leftrightarrow (f(x) = g(x))$$

10. Решите уравнение:

а) $25^{3-2x} = \frac{1}{125} \cdot (25\sqrt{5})^{-x}$; б) $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675$; в) $4^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 9^x = 0$.

11. Решите уравнение:

а) $4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}$; е) $7^{x+3} - 7^{x+2} - 2^{x+5} + 2 \cdot 0,25^{-(1+0,5x)} = 0$;
б) $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} = 12$; ж) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;
в) $\frac{2^x}{5^{x-1}} + 3 = \frac{5^x}{2^{x-1}}$; з) $8^{x+1} + 8 \cdot (0,5)^{3x} + 3 \cdot 2^{x+3} = 125 - 24 \cdot (0,5)^x$;
г) $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$; и) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}$;
д) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$; к) $2^{x^2-4x+5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4}$;
л) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

12. Решите уравнение:

а) $(x-3)^{\frac{x+1}{4}} = \sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}$; б) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$; в) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

13. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \frac{2 \cdot 4^x + 1}{2^x + 2} - 4^x = \frac{y}{2^{x+1} + 4} \\ 4 \cdot 2^{3x} + y^2 = 4 \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$$

Показательные неравенства

Для всех $a > 1$ верен переход $(a^{f(x)} > a^{g(x)}) \Leftrightarrow (f(x) > g(x))$.

Для всех $0 < a < 1$ верен переход $(a^{f(x)} > a^{g(x)}) \Leftrightarrow (f(x) < g(x))$.

$$(f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) > 0 \end{cases}$$

14. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x(2-x)} > 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$; д) $9 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{-\frac{1}{x}} < 4 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$;
б) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$; е) $(x^2 - x + 1)^x < 1$;
в) $\frac{15 - 16^{x+1}}{4^{2x} - 4} \geq 2^{4x+1} - 3$; ж) $(x^2 - 4x + 4)^{x^2-x-6} \geq 1$;
г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} + 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 < 0$; з) $f(g(x)) < g(f(x))$, где $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$.

Домашнее задание

15. Решите уравнение:

а) $3^{x-1} \cdot 2^{x+1} + 2^{x-1} \cdot 3^x = \frac{7}{36}$; д) $9 \cdot 5^x + 15 \cdot 3^{x-1} = 15^x + 45$;
б) $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} = 64$; е) $25^{1-\cos 6x} = 5^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}$;
в) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$; ж) $3^x + 3^{2-x} = 3 \cdot (1 + \cos 2\pi x)$;
г) $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$; з) $|\cos x|^{\sin^2 x - 1,5 \sin x + 0,5} = 1$.

16. Решите неравенство:

а) $4\sqrt{9-x^2} + 2 < 9 \cdot 2\sqrt{9-x^2}$; г) $5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0$;
б) $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$; д) $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$;
в) $\frac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$; е) $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} \leq 1$.