Экстремальные задачи

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

По теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своих точных верхней и нижней граней. Из теоремы Ферма следует, что это происходит *либо в критических точках, либо на концах отрезка.*

104. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций: а) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[0,01;\ 90]$;
б) $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ на отрезке $[-0,8;\ 4]$.
Вместо данной в условии бывает удобно *исследовать функцию попроще*, поскольку
1) Функция $f(x)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в той же точке, что и функции:
$f(x) + c$; $kf(x)$, где $k > 0$; $f^n(x)$, где $n \in \mathbb{N}$, $f(x) \geqslant 0$.
2) Если функция $f(x)$ принимает в некоторой точке наибольшее (наименьшее) значение, то функции $-f(x)$ и $\dfrac{1}{f(x)}$ (при условии $f(x) > 0$) принимают в этой же точке наименьшее (наибольшее) значения.

105. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+4x+11}} + 2$ на отрезке $[-3;\ 3]$.

106. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = -\cos^2 x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

107. Найдите область значений функции $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{9-x}$.

108. Найдите радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

109. В круг радиуса R впишите равнобедренный треугольник наибольшей площади.

110. Найдите координаты точки, лежащей на графике функции $y = 1 + \cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3} + 2y + 4 = 0$.

То же, но без производной

111. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций: а) $y = \sqrt{1+\cos 2x}$ на отрезке $[-3;\ 3]$;
б) $y = ||x| - 4|$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$; в) $y = 2 - 3\sin x + 4\cos x$.

112. Какова наибольшая площадь прямоугольного участка земли, который можно огородить забором длины $2p$?

113. Найдите прямоугольник наибольшей площади, вписанный в окружность радиуса R.

114. Луч света движется из одной точки в другую, отражаясь от плоского зеркала. При этом он "выбирает"путь наименьшей длины. Докажите, что в таком случае угол падения равен углу отражения.

Домашнее задание

115. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций: а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ на отрезке $[-5;\ 4]$; б) $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}]$; в) $y = x^3 - 2x|x-2|$ на отрезке $[0;\ 3]$.

116. Найдите область значений функции $y = 2x - \sqrt{16x-4}$, определенной на отрезке $\left[\dfrac{1}{4};\ \dfrac{17}{4}\right]$

117. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x + \sqrt{(x^2+6x+9)(x^2+2x+1)}$ на отрезке $[-4;\ -\frac{5}{4}]$.

118. Из проволоки длиной 24 см надо сделать модель прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. При каких размерах сторон объем параллелепипеда будет наибольшим?

119. Найдите наименьший возможный объем конуса, описанного вокруг полушара радиуса R.

120. Касательная к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ такова, что абсцисса точки касания принадлежит отрезку $[5;\ 9]$. Найдите наибольшую возможную площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x = 4$.

Нахождение экстремальных значений функции на различных множествах

121. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (если они существуют):
а) $y = x - 2\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{x}{x^4+3}$ на луче $[0;\ +\infty)$.

122. Найдите наименьшее из значений, принимаемых функцией $y = x + \dfrac{4}{(x-2)^2}$ на отрезке $[0;\ 5]$, $x \neq 2$.

123. Если батарея с ЭДС E и внутренним сопротивлением r замкнута проводником с сопротивлением R, то мощность получающегося тока выражается формулой $W = \dfrac{E^2R}{(R+r)^2}$. При каком значении R мощность будет наибольшей?

124. Найдите расстояние от точки $M(0;\ -2)$ до кривой $y = \dfrac{16}{\sqrt{3}x^3} - 2$, $x > 0$.

125. Освещенность в данной точке пропорциональна силе света источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до этого источника. В точках O_1 и O_1, удаленных друг от друга на расстояние a, помещены источники, имеющие соответственно силу света I_1 и I_2. Найдите наименее освещенную точку отрезка O_1O_2.

Домашнее задание

126. Найдите наибольшее и наименьшее значения (если они существуют) следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^4}{x^4+1}$; б) $y = x\sqrt{x+2}$; в) $y = \sin^2 x + \cos x$.

127. Найдите область значений функции $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x - 38}{x^2 + 6x + 34}$.

128. Закрытый металлический бак с квадратным основанием должен иметь объем 343м^2. При каких размерах на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?

129. Потенциальная энергия растянутой пружины выражается формулой $U = \dfrac{kx^2}{2}$, где k — постоянная, называемая жесткостью пружины, и x — удлинение пружины. Две пружины расположены на одной прямой, их дальние концы закреплены, а расстояние между ближними, равно a. Жесткость первой пружины k_1, а второй — k_2. Пружины растянули и соединили в точке X. На каком расстоянии от ближнего конца первой пружины должна находиться точка X, чтобы суммарная потенциальная энергия пружин была наименьшей?

Решите задачу двумя способами: а) с помощью производной; б) с помощью законов физики.

Разные экстремальные задачи

Рецепт:
1) выбрать удобную переменную;
2) указать (удобную:) область ее изменения;
3) составить удобную функцию;
4) исследовать ее удобным способом (сравнив значения в критических точках и на концах отрезка; исследовав на монотонность; вообще без производной).
Найдя нули производной, не торопитесь писать их в ответ, получите минус-плюс!

130. Сопротивление изгибу балки прямоугольного сечения пропорционально ее ширине x и квадрату высоты y: $P = kxy^2$. Какое сечение должна иметь балка, вырезанная из цилиндрического бревна радиуса R, чтобы ее сопротивление изгибу было как можно больше? В ответе укажите отношение высоты к ширине.

131. При каких размерах прямоугольная коробка без крышки с квадратным основанием и полной поверхностью S имеет наибольший объем?

132. Заданы периметр P и длина a одной из сторон треугольника. Какие длины должны иметь две другие стороны, чтобы его площадь была наибольшей?

133. В равнобедренный треугольник с боковыми сторонами 1 и основанием a вписан прямоугольник наибольшей площади. Чему равна его площадь в зависимости от a? При каком a площадь наибольшего прямоугольника будет наибольшей?

134. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня глаз человека на a м, а верхняя точка постамента — на b м. На каком расстоянии от памятника должен стать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

135. Из квадратного листа жести со стороной a требуется вырезать развертку правильной четырехугольной пирамиды так, чтобы вершины квадрата склеивались в вершину пирамиды. Как это сделать, чтобы получить пирамиду наибольшего объема?

136. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы свернуть из него воронку наибольшей вместимости? (объем конуса вычисляется по формуле $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания и h — высота конуса)

137. В первую бочку налито 16 кг раствора соли, а во вторую — 25 кг. Оба раствора разбавили водой так, что процентное содержание соли в первой бочке уменьшилось в m раз, а во второй — в n раз. Известно, что $mn = m + n + 3$. Найдите наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе бочки вместе.

Применение производной к исследованию уравнений и доказательству неравенств

138. Может ли уравнение $x^5 = ax^2 + bx + c$ иметь: а) 5 корней; б) 4 корня? <u>Указание</u>. *Используйте теорему Ролля.*

139. Докажите, что уравнение $x^4 + x^3 + x = 2$ имеет ровно один положительный корень.

140. Решите уравнение $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6}$.

141. Докажите неравенство $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.