Полное исследование функции

Выпуклость функции

Определение. Функция $y = f(x)$, непрерывная на интервале $(a;\, b)$, называется ***выпуклой вверх*** на этом интервале, если ее график расположен не выше любой своей касательной на этом интервале.

Функция $y = f(x)$, непрерывная на интервале $(a;\, b)$, называется ***выпуклой вниз*** на этом интервале, если ее график расположен не ниже любой своей касательной на этом интервале.

Определение. Функция $y = f(x)$, непрерывная на интервале $(a;\, b)$, называется ***строго выпуклой вверх*** на этом интервале, если ее график расположен ниже любой своей касательной на этом интервале (за исключением лишь самой точки касания). Аналогично определяется строгая выпуклость вниз.

Достаточное условие выпуклости. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и во всех точках интервала $(a;\, b)$ $f''(x) \leqslant 0$, то функция на этом интервале выпукла вверх, если же $f''(x) \geqslant 0$ —- выпукла вниз.

Достаточное условие строгой выпуклости-1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и во всех точках интервала $(a;\, b)$ $f''(x) < 0$, то функция на этом интервале строго выпукла вверх, если же $f''(x) > 0$— строго выпукла вниз.

91. Покажите с помощью контрпримера, что это условие строгой выпуклости не является необходимым.

Заметим, что при доказательстве условия строгой выпуклости использовалось не само условие $f''(x) < 0$ или $f''(x) > 0$, а строгое убывание (возрастание) первой производной. Это позволяет ослабить условие так:

Достаточное условие строгой выпуклости-2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и во всех точках интервала $(a;\, b)$ $f''(x) \leqslant 0$ ($f''(x) \geqslant 0$), причем $f''(x) = 0$ лишь в конечном числе точек, то функция на этом интервале строго выпукла вверх (вниз).

Использование термина "выпуклость"объясняет следующая

Теорема. Если функция на интервале $(a;\, b)$ выпукла вниз (вверх), то то ее график на этом интервале расположен под (над) хордой $\mathbf{AB}$, где $A(a,\, f(a))$, $B(b,\, f(b))$.

Точки перегиба

92. а) Найдите для функции $y = x^3 - 3x^2$ интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз.
    б) Сопоставьте результат с построенным графиком и решенной ранее задачей: "Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2$, имеющей единственную общую точку с графиком этой функции."

    Определение. Точка графика непрерывной функции, отделяющая его часть, выпуклую вверх, от части, выпуклой вниз, называется ***точкой перегиба***.

    Необходимое условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале $(a;\, b)$. Тогда если точка $x_0 \in (a;\, b)$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$, то $f''(x) = 0$.

93. Является ли это условие достаточным?

    Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и дифференцируема в самой точке x_0. Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба для графика функции $f(x)$.

94. Докажите, что если в точке перегиба есть касательная, то график функции переходит в этой точке с одной стороны касательной на другую.
95. Верно ли, что если график функции переходит в точке касания с одной стороны касательной на другую, то эта точка — точка перегиба?
96. Исследуйте функции на выпуклость и точки перегиба: а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 12}$; б) $y = \sqrt{4x^3 - 12x}$.
97. Найдите нули и интервалы знакопостоянства функции, исследуйте ее на монотонность и экстремумы, а также на выпуклость и точки перегиба. Затем постройте график.

    а) $y = (x-2)^2(x+2)$; в) $y = x^4 + 4x^3$ д)$y = x\sqrt[3]{x-1}$;
    б) $y = 2x^3 - x^2 + 4x$; г) $y = \dfrac{2}{x^2 - 4x + 5}$; е) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

98. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 \sin^2 \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
    а) Исследуйте эту функцию на непрерывность.
    б) Напишите уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке $x = 0$.
    в) Докажите, что графику$y = f(x)$ расположен ниже касательной при $x < 0$ и выше касательной при $x > 0$.
    г) Является ли точка $x = 0$ точкой перегиба для данной функции?

Асимптоты

Определение. Прямая называется ***асимптотой*** к графику функции $y = f(x)$, если расстояние от точки графика до прямой стремится к нулю при бесконечном удалении этой точки от начала координат.

Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда функция $y = f(x)$ терпит в точке a разрыв, причем существует бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Для построения графика удобно найти отдельно пределы слева и справа и уточнить знаки бесконечностей.

Прямая $y = b$ является ***горизонтальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существует хотя бы один из конечных пределов: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

Для доказательства последнего утверждения его удобно разбить его на две части:
а) прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда для некоторого k существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

б) В этом случае существует и конечный предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$.

Заметим, что горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при $k = 0$.

План полного исследования функции

1) Область определения.

2) Четность(нечетность), периодичность (если есть)

3) Нули, интервалы знакопостоянства. Значение в нуле.

4) Асимптоты.

5) Критические точки и их характер. Исследование на монотонность и экстремумы.

6) Исследование на выпуклость и точки перегиба.

99. Есть ли асимптоты у графиков из предпредыдущего номера?

100. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; в) $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-6x+9}$; д) $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$; ж) $y = x + \operatorname{arctg} x$;

б) $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$; г) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$; е) $y = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$; з) $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

Правило Лопиталя

...и рассказывали анекдоты о раскрытии неопределенностей методом Лопиталя.

А. и Б. Стругацкие, "Понедельник начинается в субботу"

101. Исследуйте функцию и постройте ее график $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$.

Как показывает этот пример, иногда раскрытие неопределенности при нахождении асимптот - основная техническая сложность при построении графика. В таких случаях часто применяют правило Лопиталя.

Теорема Коши. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;\, b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;\, b)$, причем $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a;\, b)$. Тогда существует $\xi \in (a;\, b)$ такая, что* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Правило Лопиталя. *Пусть в проколотой окрестности x_0 функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы, причем $g'(x) \neq 0$. Пусть также $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

A может быть как конечным числом, так и бесконечностью. Правило Лопиталя применимо также к односторонним пределам и к пределам на бесконечности.

Для раскрытия неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ переходят к функциям $\dfrac{1}{f(x)}$ и $\dfrac{1}{g(x)}$.

102. Найдите предел функции двумя способами: с помощью правила Лопиталя и без него. Как проще?

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-3x}{6x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-3x}{6x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x-1)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

103. Софизм. Найдем предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2}$ двумя способами.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+\cos x}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-\sin x}{2}$, т.е. предела нет.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{\sin x}{x^2}\right) = 1 + 0 = 1$.