Производная-2

Физический смысл производной

Как уже отмечалось, мгновенная скорость равна производной координаты по времени. А какая физическая величина соответствует второй производной координаты по времени?

17. Закон движения точки по оси Ox задается формулой $x = 10t + 5t^2$, где t — время в секундах, а x — расстояние в метрах. Найдите скорость и ускорение точки в момент $t = 20$.
18. а) По данным графикам зависимости координаты от времени начертите графики зависимости скорости и ускорения от времени.
    б) По данным графикам скорости начертите графики координаты и ускорения.
19. Определите с помощью производной понятие мгновенной угловой скорости вращения.

Аналогично с помощью производной определяется мгновенная скорость изменения массы вещества в процессе радиоактивного распада, растворения в воде и т.п. Вообще, ***производная есть мгновенная скорость изменения функции****.*

Физические величины могут меняться не только с течением времени. Например, масса однородного стержня длины x равна $m(x) = kx$, где k — линейная плотность стержня, одинаковая по всей его длине. Если же стержень неоднороден, то средняя линейная плотность участка от x_0 до $x_0 + h$ равна $k_{\text{ср.}} = \dfrac{m(x_0+h) - m(x_0)}{h}$, а линейная плотность в точке x_0 равна $m'(x_0)$

20. Определите с помощью производной перепад температуры в данной точке неравномерно нагретого стержня.
21. Определите с помощью производной понятие силы переменного тока в данный момент времени.
22. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента $t = 0$, выражается формулой $q(t) = 3t^2 - 2t$. Вычислите силу тока в конце шестой секунды.
23. Тело, брошенное вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью v_0, движется по закону $h(t) = h_0 + v_0 - \dfrac{gt^2}{2}$. Найдите высоту тела в момент времени, когда скорость тела в 2 раза меньше первоначальной, если $h_0 = 4$м, $v_0 = 3$м/с и $g \approx 10$м/с^2.

Дифференцирование тригонометрических функций

24. Найдите производные тригонометрических функций:
    а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.
25. Докажите, что производная четной дифференцируемой функции есть нечетная функция, а производная нечетной дифференцируемой функции есть четная функция.
26. Докажите, что производная периодической дифференцируемой функции есть периодическая функция с тем же периодом.
27. Найдите производные функций:
    а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos^2 \sqrt{x}$; в) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $y = x \operatorname{ctg} x$.
28. Продифференцируйте функцию.
    а) $y = \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$; в) $y = \sin(\cos x)$; д) $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;
    б) $y = \sqrt{1 - \cos x + 0,25\cos^2 x}$; г) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{tg} x}$; е) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{\cos x}}$.

Производная обратной функции

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0:
1) имеет непрерывную обратную функцию $x = g(y)$;
2) имеет ненулевую производную,
Тогда обратная функция $x = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $g'_y = \dfrac{1}{f'_x}$.

29. Докажите, что формула $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ верна не только для $\alpha \in \mathbb{N}$, но и для $\alpha \in \mathbb{Q}$.
30. Вычислите производные следующих функций: а) $y = x\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt[8]{x\sqrt[3]{x}}}$.
31. Получите формулы производных обратных тригонометрических функций.
32. Вычислите производные следующих функций:
    а) $y = \operatorname{arctg} 2x$; в) $y = \arcsin(\sin x)$; д) $y = \arcsin x + \arccos x$;
    б) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x}$; г) $y = \arcsin x \cdot \arccos x$; е) $y = \arccos \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Геометрический смысл производной

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке существует касательная к графику $f(x)$. Ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Обратно, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и ее график имеет в точке $(x_0; f(x_0))$ невертикальную касательную с угловым коэффициентом k, то существует $f'(x) = k$. В случае вертикальной касательной $f'(x_0) = \infty$.

33. Приведите пример функции, график которой имеет вертикальную касательную.
34. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = |x^2 - 8x + 10|$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.
35. Под каким углом пересекаются касательные к графику функции $y = \sqrt{5-2x}$, проведенные в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$?
36. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ***уравнение касательной*** к графику в этой точке имеет вид
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
37. Напишите уравнения касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x_0 = 0$. Как оно связано с первым замечательным пределом?
38. Найдите координаты точки пересечения двух касательных к графику функции $y = \cos x$: первая в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{6}$, а вторая в точке с абсциссой $x = \dfrac{7\pi}{6}$.
39. Напишите уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 6x + 2$, проходящей параллельно прямой $y = -2x + 8$.
40. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 3\sqrt{3}x$, составляющих с осью Ox угол $60°$.
41. Напишите уравнение касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M(2;\ -5)$.
42. Напишите уравнение касательной к кривой $y = \sqrt{4 - 2x - x^2}$, проходящей через точку $M(3;\ 0)$.
43. Найдите уравнения всех касательных к графику функции $y = \dfrac{x^2+1}{x}$, ограничивающих вместе с координатными осями треугольник площади 2.
44. Найдите уравнения двух параллельных касательных к графикам $y = \sin 2x - 3x^3$ и $y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x$.
45. На графике функции $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28$ найдите все точки, касательная в каждой из которых пересекает положительные полуоси, отсекая от них равные отрезки.
46. Углом между кривыми называют угол между касательными к ним в точке пересечения. Под каким углом пересекаются кривые $y = \sqrt{x}$ и $y = \dfrac{1}{x}$?
47. Функция $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ задает половинку окружности. Докажите, что касательная в каждой точке этой полуокружности перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания.
48. Найдите уравнения двух параллельных прямых, касающихся графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ и находящихся друг от друга на расстоянии 1.
49. Докажите, что прямая $y = 2x - 1$ не пересекает кривую $y = x^4 + 3x^2 + 2x$. Найдите расстояние между их ближайшими точками.
50. Найдите уравнения общих касательных к параболам $y = 2x^2 - x + 5$ и $y = -x^2 + 7x - 1$.
51. Найдите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = x^4 - 4x^3$ в двух различных точках.

Домашнее задание

52. Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$: первая в точке с абсциссой $x = -1$, а вторая в точке с абсциссой $x = 3$.
53. К параболе $y = 4x - x^2$ в точке на ней с абсциссой $x_0 = 3$ проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью Ox.
54. Найдите все общие точки графика функции $y = 3x - x^2$ и касательной, проведенной к этому графику через точку $P(0;\ 16)$
55. Найдите все значения x, при каждом из которых касательные к графикам функций $y = 3\cos 5x + 2$ и $y = 5\cos 3x + 2$ в точках с абсциссой x параллельны.
56. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x - |4x|$, которая касается его в двух точках. Сделайте чертеж.
57. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(1;\ 3)$, касающейся графика функции $y = 8\sqrt{x} - 7$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = x^2 + 4x - 1$.
58. Парабола с вершиной на оси Ox касается прямой, проходящей через точки $A(1;\ 2)$ и $\mathrm{B}(2;\ 4)$, в точке B. Найдите уравнение параболы.
59. Найдите геометрическое место вершин всех парабол вида $y = x^2 + ax + b$, касающихся прямой $y = 4x - 1$.