Производная-1

Определения и примеры

*Определение 1. Пусть $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x - x_0$ называют **приращением аргумента**, а $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — **приращением функции**.*

Пример 1. Пусть приращение аргумента равно Δx. Найдите приращение функции $f(x) = x^2$ в данной точке x_0: а) в общем виде; б) для $x_0 = 1$; в) для $x_0 = 2$.
г) В какой из этих двух точек функция растет быстрее?

Определение 2. Пусть материальная точка движется прямолинейно и ее координата зависит от времени по закону $s = s(t)$. Тогда
*$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется **средней скоростью** точки, а*
*$v_{\text{мгнв.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ — ее **мгновенной скоростью** в момент времени t_0.*

Пример 2. Точка движется по оси Ox, ее координата изменяется со временем по закону $x = t^2$, где t— время в секундах, а единичный отрезок равен 1м.
а) Найдите среднюю скорость точки в течение первой секунды; в течение второй секунды.
б) Найдите мгновенную скорость точки через 1 секунду после начала движения; через 2 секунды.

*Определение 3. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Выберем на нем две точки: $M(x_0; f(x_0))$ и $M_1(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$. Тогда прямая MM_1 называется **секущей**, а ее предельное положение при $\Delta x \to 0$ — **касательной** к графику в точке x_0.*

Пример 3. Определите угловой коэффициент:
а) секущей к графику функции $f(x) = x^2$, проходящей через точки $(1; 1)$ и $(2; 4)$;
б) касательных к этому графику в точках $x_0 = 1$ и $x_0 = 2$.
в) Напишите уравнения этих касательных.

*Определение 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется **производной** функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.*
*Функция, имеющая конечную производную в точке x_0, называется **дифференцируемой** в этой точке.*

При существовании только односторонних пределов говорят соответственно о производной слева или справа.

*Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой на множестве**, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. Функция, равная $f'(x)$ в любой точке этого множества, называется производной функции f.*

Правила дифференцирования. Дифференцирование рациональных функций и корней.

1. Найдите по определению производные следующих функций:

   а) $y = C$; б) $y = x$; в) $y = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$; г) $y = \frac{1}{x}$; д) $y = \sqrt{x}$; е) $y = \sqrt[3]{x}$.

2. а) Докажите, что функция, дифференцируемая в данной точке, непрерывна в ней.
   б) Верно ли обратное?

3. Докажите, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Теорема (правила дифференцирования). Если функции u и v дифференцируемы на мн-ве M, то:
функция Cu дифференцируема на M, причем $(Cu)' = Cu'$;
функция $u + v$ дифференцируема на M, причем $(u + v)' = u' + v'$;
функция uv дифференцируема на M, причем $(uv)' = u'v + uv'$;
если $v(x) \neq 0$ при всех $x \in M$, то функция $\frac{u}{v}$ дифференцируема на M, причем $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

4. Найдите производные следующих функций:

   а) $y = x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 2x - 4$; б) $y = \frac{x-3}{2x+5}$; в) $y = \frac{2x^2 + 15x + 7}{x+8}$.

5. Найдите производную функции $y=(\sqrt{x}+2)\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)$ в точке $x_0=1$.
6. Продифференцируйте функцию $y=(x^2-3x+1)(2x-4)$ двумя способами. Когда удобнее раскрывать скобки: до или после дифференцирования?
7. В каких точках непрерывны и в каких дифференцируемы следующие функции:

   а) $y=|x|$; б) $y=\operatorname{sign}(x)$; в) $y=\sqrt[3]{x}$; г) $y=(x-1)D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле?
8. При каких значениях a и b функция

   $$\begin{cases} 2x-3, & \text{если } x\leqslant 1\\ x^2+ax+b, & \text{если } x>1\end{cases}$$

   а) непрерывна на всех числовой прямой;
   б) дифференцируема на всех числовой прямой?

Теорема о производной сложной функции. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$. Тогда сложная функция $F(x)=g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем $F'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.

9. Докажите, что формула $(x^n)'=nx^{n-1}$ верна для всех $n\in\mathbb{Z}$.
10. Найдите производные следующих функций:

    а) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$; в) $y=\frac{1}{(2x+1)^5}$; д) $y=\sqrt[3]{\frac{5-2x}{4x+1}}$;

    б) $y=(x^2-4x+5)^2$; г) $y=\sqrt{1-x^2}$; е) $y=\sqrt{x-\sqrt{2x-\sqrt{x-1}}}$.
11. Найдите производную функции $y=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ двумя способами (упростить выражение можно до дифференцирования, а можно после).

    Определение. $f''(x)=(f'(x))'$, $f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$
12. Вычислите производные:

    а) $\left(\frac{x^3}{x-1}\right)''$; в) $(2x^6-6x^4+1)^{(4)}$; д) $((x^2-1)^6(x^3+5)^{10})^{(50)}$; ж) $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}$;

    б) $\left(\frac{2x^3}{x^2-4}\right)''$; г) $(x^m)^{(n)}$; е) $((x^2-1)^6(x^3+5)^{10})^{(42)}$; з) $\left(\frac{1}{x^2+7x+12}\right)^{(48)}$.

Дифференциал

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Зафиксируем x_0 и рассмотрим приращение функции $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ при $\Delta x\to 0$. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то и $\Delta f\to 0$.

*Определение. Если $\Delta f=k\Delta x+o(\Delta x)$, то выражение $k\Delta x$ называют **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $df(x)$ или dy.*

Замечание 1. Дифференциал — линейная относительно Δx часть приращения функции.

Замечание 2. df отличается от Δf на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx.

13. Истолкуйте геометрический смысл дифференциала с помощью касательной.

    Теорема. У функции $f(x)$ есть дифференциал в точке x_0 тогда и только тогда, когда в точке x_0 у нее есть конечная производная.

    При этом коэффициент k из определения дифференциала равен $f'(x_0)$, т.е. $dy=f'(x)\Delta x$.
14. Найдите дифференциалы функций $y=x$, $y=2x+3$.

    Как только что проверено, $dx=\Delta x$. Поэтому $dy=f'(x)dx$ или $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

    Для приближенного вычисления значения функции можно заменить приращение функции на ее дифференциал (а соответствующий участок графика — на отрезок касательной). При этом в формуле $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+dx+o(\Delta x)$ отбрасывается $o(\Delta x)$, откуда получается приближенное равенство $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dx=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.
15. Вычислите приближенно $2,014^3$. Оцените погрешность и оставьте только верные цифры.
16. (д/з) Вычислите приближенно $\sqrt{26}$; $\sqrt[3]{26}$. Сравните результат с мнением калькулятора.