Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Я разгадала знак "бесконечность"

Земфира

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

102. Сформулируйте определение функции, бесконечно малой на бесконечности.

103. $\boxed{\text{СК}}$ Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ и ограниченной вблизи точки a функций — бесконечно малая в точке a функция.

104. Рассмотрим произведение бесконечно малой при $x \to +\infty$ и ограниченной на $\mathbb{R}$ функций. Обязательно ли полученная функция: а) бесконечно малая при $x \to +\infty$; б) ограниченная на $\mathbb{R}$?

105. Что можно сказать о сумме бесконечно малых (в точке или на бесконечности) функций? А о разности? О произведении? О частном?

Определение. Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to +\infty$, если $(\forall N)(\exists M)(\forall x > M)(|f(x)| > N)$. Пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

106. Сформулируйте определение функции, бесконечно большой в данной точке.

107. $\boxed{\text{СК}}$ Докажите, что функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$ (в данной точке) тогда и только тогда, когда функция $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$ (в данной точке).

108. Объясните, что означает $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

109. Что можно сказать о пределе суммы:
а) двух бесконечно больших функций;
б) бесконечно большой функции и функции, имеющей конечный предел?

110. Что можно сказать о пределе произведения:
а) двух бесконечно больших функций;
б) бесконечно большой функции и функции, имеющей конечный ненулевой предел;
в) бесконечно большой и бесконечно малой функций?

111. Докажите, что многочлен ненулевой степени — бесконечно большая на бесконечности функция.

112. Что можно сказать о пределе при $x \to \infty$ рациональной функции (частного двух многочленов) в зависимости от степеней числителя и знаменателя?

113. Какие из функций бесконечно малы при $x \to +\infty$: а) $\dfrac{x^3}{x^4+1}$; б) $\dfrac{x}{10^{300}}$; в) $\dfrac{10^{300}}{x}$; г) $\dfrac{2^{[x]}+3^{[x]}}{6^{[x]}}$?

Односторонние пределы

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a-c; a)$ для некоторого положительного c. Тогда число b называется ***пределом слева*** функции $f(x)$ в точке a и обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, если $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon))((a-\delta < x < a) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon))$.

114. Дайте определение предела функции справа.

115. Докажите, что функция имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке пределы как слева, так и справа, причем эти пределы совпадают.

116. Изобразите графики функций, которые бы в точке $x_0 = 2$:
а) имели бы предел слева, но не имели бы предела справа;
б) имели бы разные пределы слева и справа.

Непрерывность функции

Определение непрерывной функции

Определение. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Критерий непрерывности. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции (т.е. $\lim\limits_{x-x_0\to 0}(f(x) - f(x_0)) = 0$)

117. Сформулируйте определение непрерывной функции на языке "$\varepsilon - \delta$". Сделайте чертеж.

118. Сформулируйте определение функции, непрерывной слева (справа).

Определение. Функция называется ***непрерывной на множестве***, если она непрерывна в каждой точке этого множества. (Непрерывность в конце отрезка предполагается односторонней)

Ранее было показано, что многочлен непрерывен на $\mathbb{R}$, а рациональная функция — на всей области определения. Вот более общее утверждение:

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке непрерывны и функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $(f(x))^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Если $g(x) \neq 0$, то непрерывна и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

119. Докажите, что функция: а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=|x|$ непрерывна на всей области определения.

Точки разрыва

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и не является в точке x_0 непрерывной. Тогда точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$.

120. Сформулируйте определение точки разрыва на языке "$\varepsilon-\delta$".

Классификация точек разрыва. Пусть x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$. Если в точке x_0 существуют конечные пределы функции $f(x)$ как слева, так и справа, то x_0 называется точкой разрыва ***первого рода***, в противном случае — ***второго рода***.

Разрыв первого рода называется ***устранимым***, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. При этом $f(x)$ может либо отличаться от этих пределов, либо вообще не существовать.

Неустранимый разрыв первого рода называется ***конечным скачком***. В этом случае конечные пределы функции $f(x)$ слева и справа существуют, но не равны друг другу.

Точка разрыва второго рода называется ***полюсом***, если оба односторонних предела в ней равны $\pm\infty$ и ***существенно особой точкой*** в противном случае.

121. Приведите примеры функций, имеющих описанные виды разрыва.

Примеры непрерывных и разрывных функций

122. Исследуйте на непрерывность следующие функции: а) $y=[x]$; б) $y=\{x\}$; в) $y=\dfrac{[x]}{\{x\}}$; г) $y=\dfrac{1}{x}$ при $|x|>1$ и $y=x^2$ при $|x|\leqslant 1$.

Определение. Композиция двух функций $f(x)=g(\varphi(x))$ называется ***сложной функцией***.

123. Пусть $f(x)=\cos x$; $g(x)=2x-3$; $\varphi(x)=\sqrt{x}$.
а) Задайте формулой функции $g(\varphi(x))$; $\varphi(f(g(x)))$.
б) Запишите в виде композиции функции $\cos\sqrt{x}$; $2\sqrt{\cos x}-3$.

124. Верно ли равенство: а) $\lim\limits_{x\to\frac12}|2x| = |\lim\limits_{x\to\frac12}2x|$; б) $\lim\limits_{x\to\frac12}[2x] = [\lim\limits_{x\to\frac12}2x]$?

Лемма. Пусть $f(x)=g(\varphi(x))$ — сложная функция, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$, а $g(x)$ непрерывна в точке b. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} g(\varphi(x)) = g(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$. (*Знак непрерывной функции и знак предела можно менять местами*)

Теорема о непрерывности сложной функции. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(x)$ непрерывна в точке $\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $g(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

125. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+7}-4}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{1-|x|}{x+1}}$.

126. Пусть функции $g(x)$ и $\varphi(x)$ определены на $\mathbb{R}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$, а $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$. Верно ли, что если композиция $g(\varphi(x))$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g(\varphi(x))=c$?

127. ***Функция Дирихле.*** $D(x)=1$ для $x\in\mathbb{Q}$, и $D(x)=0$ для $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Исследуйте функцию Дирихле на непрерывность. Какого рода у нее разрывы?

128. Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$ и:
а) разрывной только в одной точке;
б) разрывной в каждой точке;
в) непрерывной ровно в одной точке;
г) непрерывной ровно в двух точках.

129. Приведите пример функции, определенной на $\boldsymbol{R}$ и: а) разрывной в целых точках и непрерывной в остальных; б) непрерывной в целых точках и разрывной в остальных.

Непрерывность тригонометрических функций

130. Докажите, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Указание. Отметим на координатном круге точки P_0 и P_x. Проведем перпендикуляр к оси абсцисс P_xB и касательную P_xA до пересечения с осью абсцисс. Сравним длину дуги P_0P_x с длинами отрезков P_xB и P_xB.

131. Докажите, что $|\sin x| \leqslant |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$, причем равенство достигается только в нуле.

132. Докажите, что непрерывна на всей числовой оси функция: а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$.

133. Исследуйте на непрерывность функции: а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

.

134. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

135. Сделав подходящую замену, вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 1} \left((1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)$; в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$;

Порядок малости

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$.

Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая высшего порядка, чем $\beta(x)$ (а $\beta(x)$ — бесконечно малая низшего порядка, чем $\alpha(x)$).

Обозначение: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ (читается "о малое").

Если же $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathrm{c}$, где $c \neq 0$ то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка малости. Обозначение: $\alpha(x) = O(\beta(x))$ (читается "о большое").
В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны.

136. Сравните по порядку малости при $x \to 0$ функции:
x, x^2, $5x^2$, x^3, $x^3 - 3x^2$, $\sin x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$, $x \sin x$.

Домашнее задание

137. Произведение двух функций бесконечно мало. Обязательно ли одна из них бесконечно мала?

138. Найдите предел а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} - 2}{5x + 3\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})$.

139. Исследуйте на непрерывность функцию $y = \sin \frac{1}{x}$.

140. Существует ли: а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (x \sin \frac{1}{x})$?

141. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 3x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$; г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg} x - 1}$;
д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x + \sin 7x}{\cos 4x - \cos 6x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 1) \operatorname{ctg} \pi x$; ж) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$; з) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x + 2}{\cos \frac{\pi}{x}}$.