Тригонометрия — 1

Радианная мера угла

Определение. Рассмотрим окружность, ее центральный угол и высекаемую им дугу. ***Радианной мерой угла*** называется отношение длины дуги к радиусу окружности.

Таким образом, ***1 радиан*** - величина центрального угла, длина дуги которого равна радиусу окружности.

1. а) Выразите в радианах угол, равный 36°, 330°.
   б) Выразите в градусах угол, равный $\dfrac{3\pi}{2}$, 1.
2. Запишите формулы длины дуги l и площади сектора S, если радиус окружности равен R, а центральный угол равен α и измерен: а) в градусах; б) в радианах.
3. Составьте таблицу перехода от градусной меры к радианной для углов 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 270°, 360°.
4. Составьте таблицу значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для значений $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.
5. * Запишите, чему равна угловая скорость часовой, минутной и секундной стрелок (в радианах в минуту).

Тригонометрические функции числового аргумента

Рассмотрим отображение множества действительных чисел на единичную окружность. Числу 0 сопоставим точку $P_0(1, 0)$. Произвольному числу α — точку P_α — образ точки P_0 при повороте с центром в начале координат на угол α радиан. Это отображение называют намоткой действительной прямой на окружность, а получившуюся окружность — ***тригонометрическим кругом***.

6. Отметьте на тригонометрическом круге числа $\pi, -\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.
7. Отметьте на тригонометрическом круге все точки вида:
   а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$;   б) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$;   в) $\frac{\pi n}{3}$, где $n \in \mathbb{Z}$;

   Определение. Пусть точка P_α изображает на тригонометрическом круге число α. Ордината точки P_α называется ***синусом*** α, а абсцисса — ***косинусом*** α. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
8. Как согласуется последнее определение с определениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника?
9. Опишите свойства синуса и косинуса как функций числового аргумента: область определения, область значений, нули, интервалы знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума.
10. Проведем касательную l к единичной окружности в точке P_0. Пусть T_α — точка ее пересечения с прямой, проведенной через точку P_α и начало координат. Докажите, что: а) T_α существует тогда и только тогда, когда $\cos\alpha \neq 0$; б) в этом случае ордината точки T_α равна $\operatorname{tg}\alpha$. Прямую l называют ***линией тангенсов***.
11. Определите аналогичным образом ***линию котангенсов***.

    Заметим, что для малых углов верны приближенные равенства $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$. Например, относительная погрешность первого равенства для углов, меньших 10°, не превышает 1%.
12. Углом какой четверти является угол α, если а) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$;   б) $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$?
13. Составьте таблицу значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для значений $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$.
14. Найдите значение выражения а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$;   б) $\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-1}$;   в) $\dfrac{4\operatorname{tg}0 - 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}{\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}$.
15. Решите уравнение: а) $\sin\alpha = 1$;   б) $\operatorname{tg}\alpha = 0$;   в) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
16. Оцените выражение: а) $2 - 3\sin\alpha$;   б) $|3 + 4\cos\alpha|$.
17. Возможно ли равенство $5\cos\alpha - 3\sin\alpha = 8$?
18. Сравните числа: а) $\cos 1$ и $\cos 2$;   б) $\sin 1$ и $\sin 2$.
19. Определите знак числа $\sin\cos 2$.
20. Военные измеряют малые углы в тысячных. 1 тысячная — это $\dfrac{1}{3000}$ развернутого угла. Расстояние Р до удаленных предметов известной высоты В приближенно определяется по формуле $\text{Р} = \dfrac{\text{В}}{\text{У}} \cdot 1000$, где У — угол, под которым виден предмет, измеренный в тысячных. Чему равно число π с точки зрения военных?
21. * Колесо радиуса 1 касалось оси абсцисс в начале координат. В момент времени 0 оно покатилось по оси абсцисс направо со скоростью 1 (т.е. за время t его центр смещается на t). Пусть М — точка на окружности колеса, совпадавшая вначале с началом координат. Запишите ее координаты x и y как функции от времени t. Нарисуйте примерно траекторию точки М. Эта кривая называется ***циклоидой***.

Домашнее задание

22. Во сколько раз угол в π градусов меньше угла в 1 радиан?

23. Астрономы измеряют расстояния в парсеках. 1 парсек — это расстояние, с которого радиус (точнее, большая полуось) земной орбиты виден под углом $1''$. Сколько километров в 1 парсеке? $R \approx 150\,000\,000$ км.
$1''$ — 1 секунда; в градусе 60 минут, в минуте 60 секунд.

24. Решите уравнение: а) $\sin\alpha = 0$; в) $\cos\alpha = 1$; д) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; ж) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$; б) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$; г) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; з) $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

25. Решите уравнение $\cos\beta = 2a - a^2 - 2$.

26. Определите знак выражения $\sin\dfrac{4\pi}{7}\cos\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{5}\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{4\pi}{11}\right)$.

27. Сравните два числа: а) $\sin\dfrac{\pi}{10}$ и $\sin^2\dfrac{\pi}{10}$; б) $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ и $\cos\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{\pi}{5}$.

28. Вычислите $1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6} - \operatorname{tg}^3\dfrac{\pi}{6} + \ldots$.

Основное тригонометрическое тождество

29. Докажите основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
и его следствия: $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

30. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\sin\alpha$.

31. Упростите выражение: а) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha - \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, если $\pi < \alpha < 2\pi$.

32. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Найдите: а) $\dfrac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha}$; б) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{2\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$.

33. Найдите область значений функции: а) $f(x) = 3\cos^2 x - 4\sin^2 x$; б) $5\cos^2 x - \operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$.

34. Докажите неравенство: $\sin^2\alpha\cos^2\alpha \le 0,25$; б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \ge 0,5$;
в) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \ge 0,25$.

35. Найдите $\cos\alpha + \sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = a$.

36. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha$.

Периодические функции

Определение. Число T называется ***периодом*** функции $f(x)$, если для любого x их области определения $f(x)$ выполняются равенства

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T).$$

37. Всякая ли функция имеет период?

38. Что можно сказать о функции, периодами которой являются все числа?

39. Пусть функция $f(x)$ имеет периоды T_1 и T_2, Докажите, что ее периодами также являются числа: а) $-T_1$; б) $T_1 + T_2$; в) nT_1; г) $nT_1 + kT_2$, где n, k — произвольные целые числа.

Определение. Функция, имеющая ненулевой период, называется ***периодической***.

40. Найдите наименьший положительный период функции: а) $f(x) = \{x\}$; б) $f(x) = \{3x\}$.

41. Докажите, что если у функции есть наименьший положительный период T, то все остальные периоды кратны T. Наименьший положительный период функции называется ее ***основным*** периодом.

42. Найдите основной период функции: а) $f(x) = \left\{\dfrac{x}{3}\right\} + 3\left\{\dfrac{x}{5}\right\}$; б) $f(x) = \{3x\} + 8\{5x\}$;
в) $f(x) = \sqrt{1 + \{4x\}}$.

43. Является ли периодической функция: а) $f(x) = \{x^2\}$; б) $f(x) = \{x\} + \{x\sqrt{2}\}$?

Чётность и периодичность тригонометрических функций

Теорема. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ периодические. Их основной период равен 2π. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ периодические. Их основной период равен π.

44. Найдите период функции: а) $f(x) = \sin 3x + 2\cos 5x$; б) $f(x) = \sqrt{\sin\dfrac{4}{5}x + 3\operatorname{tg}\dfrac{7}{8}x + \cos 5x}$.

45. Вычислите а) $\sin\dfrac{47\pi}{6}$; б) $\cos 1543\pi$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{26\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\dfrac{199\pi}{4}$.

Теорема. Функция $y = \cos x$ — четная, а функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = \cos x$ — нечетные.