Листок 9. Полнота множества действительных чисел

5 ноября 2022

10 “В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ На бесконечной ленте бумаги выписаны в порядке возрастания все числа с суммой цифр 2019. Какое число написано на 225 месте?

Напоминание: мы приняли как аксиому существование действительного числа для любой конечной влево и бесконечной вправо последовательности десятичных цифр.

$\boxed{\mathbf{2}}$ **Лемма Кантора о вложенных отрезках.** Пусть есть бесконечная система вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что все эти отрезки имеют имеет хотя бы одну общую точку.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что если длины отрезков стремятся к нулю, то эта общая точка единственна.

$\boxed{\text{c}}$ Верна ли лемма Кантора для рациональных чисел (т.е. если все числа, которые фигурируют в утверждении: концы отрезка и общая точка, — рациональны)?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Любая ли последовательность $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots$ вложенных интервалов имеет общую точку?

Пусть A — некоторое подмножество множества действительных чисел. Число M называется **верхней гранью** *множества A, если*

$$\forall x \in A \quad x \le M.$$

Наименьшая из всех верхних граней (если она существует) называется **точной верхней гранью** *множества A (обозначение:* $\sup A$*). Аналогично определяется* **точная нижняя грань** *(обозначение:* $\inf A$*).*

$\boxed{\mathbf{4}}$ Найдите sup и inf для следующих множеств:

$\boxed{\text{a}}$ отрезок $[a, b]$;

$\boxed{\text{b}}$ интервал (a, b);

$\boxed{\text{c}}$ множество иррациональных чисел интервала (a, b);

$\boxed{\text{d}}$ последовательность чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$;

$\boxed{\text{e}}$ последовательность чисел $0,2,\ -0,22,\ 0,222,\ -0,2222,\ 0,22222, \dots$;

$\boxed{\text{f}}$ множество рациональных чисел с числителем, равным трем;

$\boxed{\text{g}}$ множество рациональных чисел со знаменателем, равным трем.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите, что число b является точной верхней гранью множества A, если и только если $\forall x \in A\ x \le b$ и $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A:\ b - \varepsilon < x$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Пусть A — множество рациональных чисел x, удовлетворяющих условию $x^2 < 2$. Найдите $\sup A$ и $\inf A$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что лемма о вложенных отрезках равносильна каждому из следующих двух утверждений.

$\boxed{\text{a}}$ Всякая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.

$\boxed{\text{b}}$ Любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.

$\boxed{\mathbf{8}}$ **Аксиома Дедекинда.** Пусть L и R — два непустых множества действительных чисел причем L находится «левее» R: если $l \in L$ и $r \in R$, то $l \leq r$. Докажите, что тогда существует *разделяющее число* c, т.е.

$$\exists c : \quad \forall l \in L, \forall r \in R \quad l \leq c \leq r.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Докажите, что следующие последовательности имеют предел:

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{3}, \ \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, \ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9}, \ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17}, \ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \frac{1}{33}, \ldots$

$\boxed{\text{b}}$ $\sqrt{2}, \ \sqrt{2\sqrt{2}}, \ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \ldots$

$\boxed{\text{c}}$ $\sqrt{2}, \ \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots$

$\boxed{\text{d}}$ $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, где $a > 0, x_1 > 0$ — заданные числа;

$\boxed{\text{e}}$ $1, \ 1 + \frac{1}{1!}, \ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, \ldots.$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Найдите пределы последовательностей из задач $9b$ — $9d$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найдите его, если $x_{n+1} = \sqrt{15 + 2x_n}$ и

$\boxed{\text{a}}$ $x_1 = 1$;

$\boxed{\text{b}}$ $x_1 = 7$.