

Листок 6. Вычисление пределов

9 октября 2022

10 “В” класс

1 Отметьте на плоскости минимальное количество точек так, чтобы среди них были вершины квадрата, и это свойство сохранялось после удаления любой точки.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю.

2 Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ тогда и только тогда, когда существует бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$ такая, что $x_n = a + \alpha_n$.

3 Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Докажите, что $x_n \neq 0$ для почти всех n и $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = 0$. Верно ли обратное утверждение?

4 Пусть последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно малая, $\{y_n\}$ — ограниченная. Докажите, что последовательность $\{x_n y_n\}$ — бесконечно малая.

5 Пусть последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ — бесконечно малые. Докажите, что последовательности $\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}$ — бесконечно малые.

6 Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Докажите, что

a $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b;$

b $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b;$

c $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab;$

d если $b \neq 0$, то $y_n \neq 0$ для почти всех n и $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/y_n) = 1/b;$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = a/b$ при $b \neq 0;$

f если $x_n \geq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x_n}) = \sqrt{a}.$

7 Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, а $\{y_n\}$ предела не имеет. Имеют ли пределы последовательности

a $\{x_n + y_n\};$

b $\{x_n y_n\}?$

8 Найдите пределы последовательностей

a $x_n = \frac{1000n}{n^2 - 101}$;

b $x_n = \frac{a_2n^2 + a_1n + a_0}{b_2n^2 + b_1n + b_0}$;

c $x_n = \frac{n^2 \sin n}{n^3 + 1}$;

d $x_n = \frac{n + 2}{\sqrt{n^2 + n}}$;

e $x_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$;

f $x_n = n - \sqrt[3]{n^3 + 3}$;

g $x_n = n - \sqrt{n^2 - n + 1}$.

9 Докажите, что

a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0$, если $a > 1$;

b $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0$, если $a > 1$;

c $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, если $a > 1$;

d $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{a^n} = 0$, где $P(n)$ — произвольный многочлен, $a > 1$.