

## Листок 5. Предел последовательности

02 октября 2022

10 "В" класс

**1** Дима написал на доске квадратный трехчлен  $f(x)$ . Соня сразу указала два таких различных числа  $a$  и  $b$ , что  $f(a) = b$  и  $f(b) = a$ . Насте стало завидно, и она решила найти другую такую пару чисел. Докажите, что у Насти ничего не выйдет.

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Множество точек, находящихся на расстоянии менее  $\varepsilon$  от точки  $a$ , называется  **$\varepsilon$ -окрестностью точки  $a$** :

$$U_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Множество  $\{x \in \mathbb{R} : |x| > 1/\varepsilon\}$  называется  **$\varepsilon$ -окрестностью бесконечности**.

**2** Докажите, что у любых двух различных точек  $a$  и  $b$  плоскости существуют непересекающиеся окрестности.

Число  $a$  называется **пределом** последовательности  $\{x_n\}$  если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n > n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

В этом случае говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  стремится (сходится) к  $a$ . Обозначения:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{или} \quad x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

**3** Докажите, что у последовательности не может быть двух различных пределов.

**4** Приведите пример последовательности, которая не имеет предела.

**5**

**a** Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограничена.

**b** Верно ли обратное?

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для **почти всей** последовательности, если оно выполняется для всех членов последовательности, за исключением, быть может, конечного их числа.

**6** Пусть известно, что почти вся последовательность  $\{x_n\}$  лежит на отрезке  $[0, 2]$  и бесконечное число ее членов лежит на отрезке  $[1, 3]$ . Какие из следующих высказывания всегда истинны, какие всегда ложны? Какие могут быть и истинными, и ложными?

**a** На отрезке  $[1, 2]$  лежит почти вся последовательность  $\{x_n\}$ .

**b** На отрезке  $[1, 2]$  лежит бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$ .

**c** Последовательность  $\{x_n\}$  ограничена.

**d** Существует отрезок длины  $\frac{1}{100}$  на котором лежит бесконечно много членов последовательности.

**e** Существует отрезок длины  $\frac{1}{100}$  на котором лежат почти все члены последовательности.

**7** Докажите, что данное выше определение предела последовательности эквивалентно следующему:

*Число  $a$  называется **пределом** последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  почти вся последовательность  $\{x_n\}$  содержится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ .*

**8** Выясните, какие из следующих последовательностей имеют предел:

**a**  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \dots$ ;

**b**  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \dots$ ;

**c**  $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}, \dots$ ;

**d**  $q, q + q^2, q + q^2 + q^3, \dots$ ;

**e**  $\sin(1^\circ), \sin(2^\circ), \dots, \sin(n^\circ), \dots$ ;

**f**  $\sin(1), \sin(2), \dots, \sin(n), \dots$