

Листок 4. Действительные числа.

18 сентября 2022

10 “В” класс

1 Дана клетчатая доска 1000×1000 . Фигура гепард из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x , за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

Бесконечной десятичной дробью называется конечная влево и бесконечная вправо последовательность десятичных цифр вида

$$\pm \overline{a_{-n} \dots a_{-1} a_0, a_1 \dots a_m \dots}$$

На множестве десятичных дробей естественным образом определены операции сложения, вычитания, умножения и деления, а также отношение порядка.

Любое действительное число можно записать в виде бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби, и каждой такой дроби соответствует некоторое действительное число. Десятичная запись числа единственна с точностью до эквивалентности записей вида

$$\overline{a_{-n} \dots a_{-1} a_0, a_1 \dots a_{i-1} a_i 999 \dots} = \overline{a_{-n} \dots a_{-1} a_0, a_1 \dots a_{i-1} (a_i + 1) 000 \dots}$$

2 **a** Запишите число $\frac{11}{7}$ в виде бесконечной периодической дроби.

b Представьте число $1, (18)$ в виде обыкновенной несократимой дроби.

3 Докажите, что число является рациональным тогда и только тогда, когда оно записывается в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

4 **a** Докажите, что произвольное множество попарно непересекающихся интервалов (т.е. подмножеств числовой прямой вида (a, b) , где $a < b$) не более чем счетно.

b Верно ли, что произвольное множество попарно непересекающихся отрезков (т.е. подмножеств числовой прямой вида $[a, b]$, где $a \leq b$) не более чем счетно?

5 Лев измерил расстояния от некоторой точки окружности до вершин вписанного в нее квадрата. Могли ли все четыре числа оказаться рациональными?

6 Изначально по кругу стоят 40 синих, 30 красных и 20 зелёных фишек, причем фишки одного цвета идут подряд. За один ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зелёную фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов?

Листок 4. Действительные числа.

18 сентября 2022

10 “В” класс

1 Дана клетчатая доска 1000×1000 . Фигура гепард из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x , за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

Бесконечной десятичной дробью называется конечная влево и бесконечная вправо последовательность десятичных цифр вида

$$\pm \overline{a_{-n} \dots a_{-1} a_0, a_1 \dots a_m \dots}$$

На множестве десятичных дробей естественным образом определены операции сложения, вычитания, умножения и деления, а также отношение порядка.

Любое действительное число можно записать в виде бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби, и каждой такой дроби соответствует некоторое действительное число. Десятичная запись числа единственна с точностью до эквивалентности записей вида

$$\overline{a_{-n} \dots a_{-1} a_0, a_1 \dots a_{i-1} a_i 999 \dots} = \overline{a_{-n} \dots a_{-1} a_0, a_1 \dots a_{i-1} (a_i + 1) 000 \dots}$$

2 **a** Запишите число $\frac{11}{7}$ в виде бесконечной периодической дроби.

b Представьте число $1, (18)$ в виде обыкновенной несократимой дроби.

3 Докажите, что число является рациональным тогда и только тогда, когда оно записывается в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

4 **a** Докажите, что произвольное множество попарно непересекающихся интервалов (т.е. подмножеств числовой прямой вида (a, b) , где $a < b$) не более чем счетно.

b Верно ли, что произвольное множество попарно непересекающихся отрезков (т.е. подмножеств числовой прямой вида $[a, b]$, где $a \leq b$) не более чем счетно?

5 Лев измерил расстояния от некоторой точки окружности до вершин вписанного в нее квадрата. Могли ли все четыре числа оказаться рациональными?

6 Изначально по кругу стоят 40 синих, 30 красных и 20 зелёных фишек, причем фишки одного цвета идут подряд. За один ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зелёную фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов?