

Листок 3. Последовательности

15 сентября 2022

10 "В" класс

1 Маша, Соня, Настя и Ева написали на доске по числу. Оказалось, что все четыре числа различные, и какие два числа на доске ни перемножить, получается опять одно из чисел написанных на доске. Ева написала 1543. Какие числа написали остальные девочки?

2 Найдите какое-нибудь n для которого выполняется неравенство

a $1,01^n > 1543$;

b $100 \cdot 2^n < n!$;

c $\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{100+n} > 1$.

Последовательностью чисел называется отображение из \mathbb{N} в \mathbb{R} .

Обозначение: $\{a_n\}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется

- **ограниченной**, если $\exists C \forall n |a_n| < C$;
- **ограниченной сверху**, если $\exists C \forall n a_n < C$;
- **ограниченной снизу**, если $\exists C \forall n a_n > C$.

3 Напишите определение неограниченной последовательности.

4 Является ли последовательность $\left\{ \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 - 7n + 2} \right\}$ ограниченной?

5 Существует ли ограниченная последовательность, у которой

a есть и наибольший, и наименьший член;

b есть наибольший, но нет наименьшего члена;

c нет ни наибольшего, ни наименьшего члена?

6 Найдите наибольший элемент последовательностей $\{a_n\}$, если

a $a_n = \frac{n^2}{2^n}$;

b $a_n = \frac{3n}{100 + 4n^2}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется

- **возрастающей**, если $\forall n a_{n+1} > a_n$;
- **убывающей**, если $\forall n a_{n+1} < a_n$.

7 Приведите пример возрастающей последовательности, которая является ограниченной.

Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к бесконечности, если

$$\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n > n_0 \quad |a_n| > A.$$

8

a Верно ли, что любая последовательность либо является ограниченной, либо стремится к бесконечности?

b Тот же вопрос для монотонных последовательностей.

9 Выясните, какие из следующих последовательностей стремятся к бесконечности:

a $a_n = n^3 - 100n^2$;

b $a_n = \frac{n^2 + 1}{5n + 3}$;

c $a_n = \frac{n^2 + 1}{1,5^n}$.

10 Выясните, какие из следующих последовательностей являются ограниченными:

a $a_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n, |q| < 1$;

b $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$;

c $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

11 Докажите, что любая последовательность либо ограничена, либо содержит стремящуюся к бесконечности подпоследовательность.

12 Есть 9 внешне неразличимых шаров, из них 4 из золота, 5 — из меди. Эксперт знает, какие шары золотые. Но он может только лишь отвечать “да” или “нет” на ваши вопросы. За какое минимальное число вопросов можно узнать все золотые шары?