Листок 19. Основная теорема алгебры

22 апреля 2023

10 “В” класс

Основная теорема алгебры *утверждает: любой отличный от константы многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.*

Доказательство основной теоремы можно получить, решив задачи 1–5.

1 Пусть точка z делает один оборот вокруг начала координат, двигаясь по окружности $|z| = r$. Сколько оборотов при этом делает точка z^n?

2 Докажите, что какими бы ни были комплексные числа $a_1, \ldots, a_n$ найдется такое действительное число R, что при $|z| > R$ будет выполнено неравенство $|z^n| > |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$.

3 Сколько оборотов вокруг нуля делает точка $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, когда точка z делает один оборот по окружности $|z| = R$ при большом R?

4 Сколько оборотов вокруг нуля делает точка $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, когда точка z делает один оборот по окружности $|z| = R$ при малом R, если $a_n \neq 0$?

5* Докажите основную теорему алгебры.

6 Докажите, что многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней (не обязательно различных).

7 Найдите и изобразите на комплексной плоскости все корни следующих уравнений:

a) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$; b) $z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 4 = 0$

8 a) Докажите, что для любого многочлена P с вещественными коэффициентами выполнено $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

b) Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на множители с действительными коэффициентами не выше второй степени.

$\boxed{\textbf{9}}$ Разложите на квадратные трехчлены и линейные двучлены с вещественными коэффициентами:
$\boxed{\text{a}}$ x^4+4; $\boxed{\text{b}}$ $x^4+x^3+x^2+x+1$; $\boxed{\text{c}}$ x^n-1.

$\boxed{\textbf{10}}$ $\boxed{\text{a}}$ Представьте многочлен $P(x)=x^4+5x^2+6$ в виде $Q^2(x)+R^2(x)$, где Q, R — некоторые многочлены с вещественными коэффициентами.
$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что если для многочлена P с вещественными коэффициентами $P(x)>0$ при любом $x\in\mathbb{R}$, то $P=Q^2+R^2$ для некоторых многочленов Q, R с вещественными коэффициентами.

$\boxed{\textbf{11}}$ Докажите **теорему Виета**: если $z_1,\dots,z_n$ — корни уравнения $z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n=0$, то $z_1+\dots+z_n=-a_1$, $z_1z_2+z_1z_3+\dots+z_{n-1}z_n=a_2$, $\dots$, $z_1z_2\cdots z_n=(-1)^na_n$.

$\boxed{\textbf{12}}$ Докажите, что при любых целых неотрицательных m, n, p многочлен $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на x^2+x+1.

$\boxed{\textbf{13}}$ Уравнение $x^3+mx^2+nx+12$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=-2$. Найдите его третий корень и числа m, n.

$\boxed{\textbf{14}}$ Пусть x_0 — корень уравнения $x^2+x+1=0$. Найдите $x_0^{32}+(1/x_0)^{32}$.

$\boxed{\textbf{15}}$ Найдите явные формулы для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, заданных рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n-4y_n, \\ y_{n+1} = 3y_n+4x_n, \end{cases}$$

если $\boxed{\text{a}}$ $x_0=1$, $y_0=0$; $\boxed{\text{b}}$ $x_0=1$, $y_0=2$.