Листок 2. Равномощность и кардиналы
8 "В" класс
8 сентября 2022 г.

1 Докажите, что:

a) всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

b) если A — бесконечное множество, то $|A \cup \{a\}| = |A|$;

c) если A — бесконечно, а B конечно или счетно, то $|A \cup B| = |A|$;

d) если A несчетно, а B счетно, то $|A \backslash B| = |A|$.

2 Докажите, что:

a) отрезок равномощен полуинтервалу (т.е. отрезку без одного из концов), построив явную биекцию (воспользуйтесь предыдущей задачей);

b) отрезок равномощен интервалу;

c) окружность равномощна отрезку.

3 Докажите, что множество конечных последовательностей нулей и единиц счетно.

4* Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно. (Это утверждение называется **диагональ Кантора**.)

5 Найдите: a) $|P(\{1, \ldots, n\})|$; b) $|P(N)|$, где $|N| = \aleph_0$.

6* Докажите, что $|P(A)| \neq |A|$ для любого множества A.

7 Докажите, что отношение "не больше", рефлексивно и транзитивно.

8 Пусть $|A| \leq |B|$. Верно ли, что существует сюръективное отображение из B в A?

9 Пусть A конечное множество, а B — бесконечное. Докажите, что $|A| < \aleph_0 \leq |B|$.

10 Существует ли такое α, что $2^\alpha = \aleph_0$?

11 На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в ее середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

Листок 2. Равномощность и кардиналы
8 “В” класс
8 сентября 2022 г.

1 Докажите, что:

a) всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

b) если A — бесконечное множество, то $|A \cup \{a\}| = |A|$;

c) если A — бесконечно, а B конечно или счетно, то $|A \cup B| = |A|$;

d) если A несчетно, а B счетно, то $|A \setminus B| = |A|$.

2 Докажите, что:

a) отрезок равномощен полуинтервалу (т.е. отрезку без одного из концов), построив явную биекцию (воспользуйтесь предыдущей задачей);

b) отрезок равномощен интервалу;

c) окружность равномощна отрезку.

3 Докажите, что множество конечных последовательностей нулей и единиц счетно.

4* Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно. (Это утверждение называется **диагональ Кантора**.)

5 Найдите: a) $|P(\{1, \ldots, n\})|$; b) $|P(N)|$, где $|N| = \aleph_0$.

6* Докажите, что $|P(A)| \neq |A|$ для любого множества A.

7 Докажите, что отношение “не больше”, рефлексивно и транзитивно.

8 Пусть $|A| \leq |B|$. Верно ли, что существует сюръективное отображение из B в A?

9 Пусть A конечное множество, а B — бесконечное. Докажите, что $|A| < \aleph_0 \leq |B|$.

10 Существует ли такое α, что $2^\alpha = \aleph_0$?

11 На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в ее середине. Найдите острые углы треугольника ABC.