

Листок 18. Комплексные числа

1 апреля 2023

10 "В" класс

Комплексным числом называется пара (a, b) вещественных чисел. Она записывается в виде $a + bi$. Сумма комплексных чисел определяется формулой $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$, а произведение — формулой $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$. (В этих формулах выполняется равенство $i^2 = -1$).

Через $\operatorname{Re}(z) := a$ обозначается вещественная часть комплексного числа, а через $\operatorname{Im}(z) := b$ — мнимая часть.

Число $\bar{z} := a - bi$ называется комплексно-сопряжённым к числу $z = a + bi$.

1 Докажите, что для любого неравного нулю комплексного числа $z = a + bi$ существует обратное число w , т.е. $zw = 1$.

2 Найдите сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел, полученных от принимающего.

3 Решите в комплексных числах следующие уравнения:

a $z^2 + 4z + 29 = 0$

b $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$

c $z^3 - 1 = 0$.

Сопоставим комплексному числу $z = a + bi$ точку Z на плоскости с координатами (a, b) . Ось абсцисс будем называть действительной осью, а ось ординат — мнимой осью. Расстояние от точки Z до начала координат называется модулем комплексного числа z : $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

4 **a** Докажите, что $|z|^2 = z\bar{z}$.

b Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

5 **a** **Тригонометрическая форма.** Докажите, что для любого комплексного числа z существуют такие вещественные $r \geq 0$ и φ , что $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Единственны ли r и φ ? Угол φ , определенный с точностью до слагаемых, кратных 2π , называется *аргументом* числа z .

6 **a** Какое геометрическое преобразование переводит число z в число iz ?

b Докажите что умножение на комплексное число с модулем 1 — это движение.

c Какое это будет движение?

d Каков геометрический смысл умножения на произвольное комплексное число с модулем r ?

e Выразите число w , полученное из числа z поворотом на угол φ против часовой

стрелки относительно центра z_0 , через z , z_0 и φ .

f **Формула умножения.** Справедливо равенство

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi).$$

g **Формула Муавра.** Справедливо равенство

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

h Для каждого целого $n > 0$ решите уравнение $z^n = 1$ в комплексных числах z .

7 Представьте в тригонометрической форме числа:

a $-1/2 + i\sqrt{3}/2$;

b $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$;

c -5 ;

d $-17i$;

e $\sin \pi/6 + i \sin \pi/6$;

f $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$;

g $\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}$.

h $\frac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}-i)^6}$

8 Найдите и нарисуйте на комплексной плоскости все значения корней:

a $\sqrt[5]{64i}$

b $\sqrt[4]{2 + 2\sqrt{3}i}$

9 Какие множества на комплексной плоскости описываются следующими условиями:

a $|z| \leq 1$;

b $|z-i| \leq 1$;

c $|z| = z$;

d $|\frac{z-1}{z+1}| < 1$;

e $\arg \frac{z-i}{z+i} = \frac{\pi}{4}$;

f $\operatorname{Re}(z^2) \leq 1$;

g $|iz+1| = 3$;

h $|z-i| + |z+i| = 2$;

i $\operatorname{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$;

j $\frac{\pi}{6} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{3}$

10 Найдите $\min |3 + 2i - z|$ при $|z| \leq 1$.

11 Запишите с помощью неравенств следующие множества точек на комплексной плоскости:

a полуплоскость, расположенная строго левее мнимой оси;

b первый квадрант, не включая координатных осей;

c множество точек, отстоящих от мнимой оси на расстоянии, меньшем двух;

d полукруг радиуса 1 (без полуокружности) с центром в точке O , расположенный не выше действительной оси.

12 Метеоролог считает промежуток из n подряд идущих дней *удачным*, если число солнечных дней в этом промежутке было нечетным. Какое максимальное количество удачных промежутков могло быть в июле?

13 Натуральное число назовем *печальным*, если при любом представлении его в виде суммы натуральных неединичных слагаемых и последующей замене всех знаков $+$ знаками умножения, мы получим число, не являющееся факториалом никакого натурального числа. Найдите все печальные числа.