

# Листок 17. Непрерывность — 3

16 марта 2023

10 “В” класс

- 1 Теорема Больцано-Коши.** Докажите, что функция, непрерывная на отрезке и принимающая значения разных знаков на его концах, обращается в нуль в какой-то точке отрезка.
- 2** Докажите, что квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$ , для которого  $a + b + c > 0$ , а  $a - b + c < 0$ , имеет два действительных корня.
- 3** При каких значениях параметра  $a$  число 3 заключено между корнями уравнения  $x^2 - (2a + 1)x + 4 - a = 0$ ?
- 4 Теорема о промежуточном значении.** Докажите, что функция, непрерывная на отрезке, принимает все свои промежуточные значения.
- 5** Докажите, что областью значений непрерывной на отрезке функции является отрезок.
- 6**     **a** Верно ли обратное: если областью значений некоторой функции, определенной на отрезке, является отрезок, то она непрерывна?  
**b** Верно ли предыдущее утверждение, если дополнительно известно, что функция монотонна?
- 7** Докажите, что территорию Кремля можно разделить на две равновеликие части, проведя прямую:  
**a** строго по меридиану;     **b** через вход в “Польскую моду”.
- 8** Докажите, что многочлен нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.
- 9** Докажите, что если выпуклая ограниченная плоская фигура имеет центр симметрии, то в нее можно вписать квадрат.
- 10** Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через его вершину, является многоугольником с нечетным количеством сторон?
- 11** Докажите, что если функция  $f(x)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и уравнение  $f(x) = x$  не имеет корней, то уравнение  $f(f(x)) = x$  также не имеет корней.
- 12** Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 3000 (каждое должно встречаться один раз) таким образом, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась на следующее за ними по часовой стрелке?
- 13** Есть 2022 шариков 1011 цветов (по два шарика каждого цвета). Они разложены по 1011 мешкам (по 2 шарика в мешке). Известно, что можно вытащить из каждого мешка по одному шарiku так, что все вытасценные 1011 шариков будут разноцветные. Докажите, что число способов так вытащить 1011 шариков есть ненулевая степень двойки.
- 14** Барон Мюнхгаузен заявил, что может переставить цифры числа  $\pi$  так, что получится рациональное число. Могут ли его слова быть правдой?

# Листок 17. Непрерывность — 3

16 марта 2023 10 “В” класс

**1** **Теорема Больцано-Коши.** Докажите, что функция, непрерывная на отрезке и принимающая значения разных знаков на его концах, обращается в нуль в какой-то точке отрезка.

**2** Докажите, что квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$ , для которого  $a + b + c > 0$ , а  $a - b + c < 0$ , имеет два действительных корня.

**3** При каких значениях параметра  $a$  число 3 заключено между корнями уравнения  $x^2 - (2a + 1)x + 4 - a = 0$ ?

**4** **Теорема о промежуточном значении.** Докажите, что функция, непрерывная на отрезке, принимает все свои промежуточные значения.

**5** Докажите, что областью значений непрерывной на отрезке функции является отрезок.

**6** **[a]** Верно ли обратное: если областью значений некоторой функции, определенной на отрезке, является отрезок, то она непрерывна?

**[b]** Верно ли предыдущее утверждение, если дополнительно известно, что функция монотонна?

**7** Докажите, что территорию Кремля можно разделить на две равновеликие части, проведя прямую:

**[a]** строго по меридиану; **[b]** через вход в “Польскую моду”.

**8** Докажите, что многочлен нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

**9** Докажите, что если выпуклая ограниченная плоская фигура имеет центр симметрии, то в нее можно вписать квадрат.

**10** Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через его вершину, является многоугольником с нечетным количеством сторон?

**11** Докажите, что если функция  $f(x)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и уравнение  $f(x) = x$  не имеет корней, то уравнение  $f(f(x)) = x$  также не имеет корней.

**12** Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 3000 (каждое должно встречаться один раз) таким образом, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась на следующее за ними по часовой стрелке?

**13** Есть 2022 шариков 1011 цветов (по два шарика каждого цвета). Они разложены по 1011 мешкам (по 2 шарика в мешке). Известно, что можно вытащить из каждого мешка по одному шару так, что все вытасенные 1011 шариков будут разноцветные. Докажите, что число способов так вытащить 1011 шариков есть ненулевая степень двойки.

**14** Барон Мюнхгаузен заявил, что может переставить цифры числа  $\pi$  так, что получится рациональное число. Могут ли его слова быть правдой?