Листок 16. Непрерывность – 2

15 февраля 2023

10 “В” класс

Определение. *Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a, то говорят, что она* **разрывна** *в точке a.*

Классификация точек разрыва. Пусть a – точка разрыва функции $f(x)$.

- Если существует предел $f(x)$ в точке a, но либо он не равен $f(a)$, либо $f(x)$ не определена в точке a, то такой разрыв называется **устранимым** (removable discontinuity).
- Если пределы $f(x)$ слева и справа в точке a существуют и конечны, но не равны друг другу, то такой разрыв называется **конечным скачком** (jump discontinuity).
- Если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то точка a называется **существенно особой точкой** (essential discontinuity).

1 Пусть $f(x)$ непрерывна в точке a, а $g(x)$ разрывна в точке a. Верно ли, что
a $f(x) + g(x)$ разрывна в точке a? b $f(x) \cdot g(x)$ разрывна в точке a?

2 Найдите точки разрыва a функции «сигнум» $f(x) = sgn(x)$;
b функции Дирихле $f(x) = D(x)$; c функции Римана $f(x) = r(x)$.

3 Найдите точки разрыва следующих функций и определите их тип:
a $f(x) = \dfrac{x^2+1}{|x|(x-1)}$; b $f(x) = \operatorname{tg} x$; c $f(x) = \dfrac{|x-2|\sin x}{x^3 - x^2 - 2x}$.

Определение. Канторова лестница. Будем определять множество $C(x)$ пошагово.
1 шаг. Пусть $C(0) = 0$, $C(1) = 1$.
2 шаг. Разделим отрезок $[0;\, 1]$ на три равные части и положим $C(x) = \frac{1}{2}$ при $x \in [\frac{1}{3};\, \frac{2}{3}]$.
3 шаг. Разделим каждый из двух отрезков $[0;\, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3};\, 1]$ на три равные части и положим $C(x) = \frac{1}{4}$ при $x \in [\frac{1}{9};\, \frac{2}{9}]$ и $C(x) = \frac{3}{4}$ при $x \in [\frac{7}{9};\, \frac{8}{9}]$.
4 шаг. Разделим каждый из 4 отрезков $[0;\, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9};\, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3};\, \frac{7}{9}]$ и $[\frac{8}{9};\, 1]$ на три равные части и в их центральных частях положим $C(x)$ соответственно $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{8}$.
Функция Кантора $C(x)$ получается в результате выполнения бесконечного числа шагов.

4 a Какова область определения функции Кантора?
b Исследуйте функцию Кантора на непрерывность.
Указание. Представьте числа отрезка $[0, 1]$ в виде бесконечных дробей в троичной системе.

Определение. *Функция называется* **непрерывной на множестве***, если она непрерывна в каждой точке этого множества. (Непрерывность на концах отрезка предполагается односторонней.)*

$\boxed{\mathbf{5}}$ Исследуйте на непрерывность функции $y = \sin\frac{1}{x}$ и $y = x\sin\frac{1}{x}$. Установите тип точек разрыва (если они есть).

$\boxed{\mathbf{6}}$ Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$ и
$\boxed{\text{a}}$ разрывной в целых точках и непрерывной в остальных;
$\boxed{\text{b}}$ непрерывной в целых точках и разрывной в остальных.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что если функция непрерывна в некоторой точке, то в достаточно малой окрестности этой точки она ограничена.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Докажите, что если функция непрерывна в некоторой точке и ее значение в этой точке отлично от нуля, то в достаточно малой окрестности этой точки функция сохраняет знак.

$\boxed{\mathbf{9}}$ **Первая теорема Вейерштрасса.** Докажите, что функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Верно ли утверждение теоремы для функции, непрерывной на интервале?

$\boxed{\mathbf{11}}$ **Вторая теорема Вейерштрасса.** Докажите, что функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значения.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Верно ли утверждение теоремы для разрывной, но ограниченной на отрезке функции?

$\boxed{\mathbf{13}}$ Назовём положительную числовую дробь любопытной, если сумма её числителя и знаменателя равна 2023. Всякую ли дробь можно выразить через любопытные с помощью сложения и вычитания?