

## Листок 15. Непрерывность

2 февраля 2022

10 "В" класс

**Определение 1.** Пусть функция  $f(x)$  определена на интервале  $(a - c; a)$  для некоторого положительного  $c$ . Тогда число  $b$  называется **пределом слева** функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad a - \delta < x < a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ .

**1** Дайте определение предела функции справа.

**2** Найдите пределы слева и справа в нуле функции «сигнум».

**3** Докажите, что функция имеет предел в точке  $a$  тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке пределы как слева, так и справа, причем эти пределы совпадают.

**4** Пусть функция  $f(x)$  не убывает и ограничена сверху на интервале  $(a; b)$ . Докажите, что существует  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ .

**5** Докажите, что функция, монотонная на интервале  $(a; b)$ , имеет в каждой точке этого интервала предел как слева, так и справа.

**Определение 2.** Пусть функция  $f(x)$  определена на некотором интервале, содержащем точку  $a$ . Функция  $f(x)$  называется **непрерывной** в точке  $a$ , если ее предел в точке  $a$  равен  $f(a)$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

**6** Используя определения предела по Коши и Гейне (т.е. язык « $\varepsilon - \delta$ »), сформулируйте два эквивалентных определения непрерывности.

**7** Сформулируйте определение функции, непрерывной слева (справа).

**8** В каких точках функция  $f(x) = [x]$  непрерывна? непрерывна справа? непрерывна слева?

**9** Докажите, что

**a** если  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $a$ , то  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x)g(x)$  непрерывны в точке  $a$ ;

**b** если к тому же  $g(a) \neq 0$ , то  $f(x)/g(x)$  непрерывна в точке  $a$ .

**10** Пусть  $f(g(t))$  — сложная функция, причем  $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = b$ , а  $f(x)$  непрерывна в точке  $b$ . Докажите, что знак непрерывной функции и знак предела можно менять местами:  $\lim_{t \rightarrow a} f(g(t)) = f(\lim_{t \rightarrow a} g(t))$ .

**11** Докажите, что, если  $f(x)$  непрерывна в точке  $b$ , а  $g(t)$  непрерывна в точке  $a$ , причем  $g(a) = b$ , то  $h(t) = f(g(t))$  непрерывна в точке  $a$ .

**12** Докажите, что следующие функции непрерывны на  $\mathbb{R}$ :

**a**  $f(x) = (2x - 1)^{1543}$ ;      **b**  $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ ;

**c**  $f(x) = \sin x$ ;      **d**  $f(x) = \cos x$ .

**13** Двое играют в следующую игру. Маша выписывает на доску 5 ненулевых цифр, затем Настя пишет еще одну не нулевую цифру. Если из выписанных 6 цифр можно составить число, которое является делителем числа  $\underbrace{11\dots1}_{1543}$  то побеждает Маша, иначе — Настя. Кто выигрывает при правильной игре?

**14**      **a** Сфинкс загадал три произвольных натуральных числа  $x, y, z$ . Если путник назовет Сфинксу три натуральных числа  $a, b$  и  $c$ , то сфинкс скажет ему, чему равно  $ax + by + cz$ . Как за два вопроса путник может угадать числа Сфинкса?

**b** Сфинкс загадал натуральные числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Путник называет Сфинксу число  $x$ , а Сфинкс сообщает  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ . Как за два вопроса путник может угадать числа Сфинкса?

**15** Есть таблица  $15 \times 100$  (15 столбцов, 100 строк). В каждой строке в каких-то двух клетках стоит по фишке. Каждая следующая строка отличается от предыдущей положением ровно одной фишки: та сдвигается либо вправо, либо влево на одну клетку. Докажите, что есть две строки, в которых фишки стоят на одинаковых позициях.