

Листок 13. Вычисление пределов – 2

19 января 2022

10 “В” класс

Определение. Пусть область E_g значений функции g является подмножеством области D_f определения функции f . Тогда определена функция $h(t) = f(g(t))$ с областью определения $D_h = D_g$. Эта функция называется композицией функций f и g .

1 Теорема о пределе композиции функций.

1. Пусть функция $g(t)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = b$,
2. в некоторой проколотой окрестности точки a функция $g(t)$ не принимает значений, равных b ,
3. функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки b и $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$,

Тогда $\lim_{t \rightarrow a} f(g(t)) = c$.

2 Докажите, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3 Докажите, что:

- a) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$;
- b) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$;
- c) $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$ при $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

4 **Первый замечательный предел.** Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

5 Докажите, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

не имеет предела ни в какой точке.

6 Пусть $r(x)$ — функция Римана:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \quad (m, n) = 1; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Существует ли: a) $\lim_{x \rightarrow 1} r(x)$? b) $\lim_{x \rightarrow e} r(x)$?

7 В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились любые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.)

8 На плоскости отметили все вершины правильного n -угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n -угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n -угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?