

Листок 12. Вычисление пределов – 1

12 января 2022

10 “В” класс

1 Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, то для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, члены которой принадлежат области определения $f(x)$ и отличны от a , последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b .

2 Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Эти задачи доказывают корректность *второго определения предела функции в точке*, предложенного немецким математиком *Генрихом Гейне*:

Определение предела функции по Гейне. *Функция $f(x)$ имеет предел в точке a , равный b , если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a , и для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a , члены которой не равны a , предел последовательности значений $\{f(x_n)\}$ равен b :*

$$\forall \{x_n\}, x_n \neq a \quad x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b.$$

3 Пусть дана функция $f(x)$. Рассмотрим множество сходящихся к a последовательностей $\{x_n\}$, члены которых принадлежат области определения $f(x)$. Докажите, что если все соответствующие им последовательности $\{f(x_n)\}$ сходятся, то они сходятся к одному и тому же пределу.

4 Докажите, что предел функции в точке единственен, пользуясь определением предела **a** по Коши; **b** по Гейне.

5 Сформулируйте определения предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ по Коши и по Гейне.

Большинство свойств пределов функций аналогично соответствующим свойствам пределов последовательностей. При доказательстве этих свойств иногда удобнее пользоваться определением предела по Коши, а иногда по Гейне. Правильный выбор часто сильно облегчает доказательство.

6 Докажите, что, если функция имеет предел в точке, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

7 Сформулируйте и докажите арифметические свойства пределов функций.

8 Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах.

9 Сформулируйте и докажите теорему о двух милиционерах.

10 Найдите пределы:

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 5}{x^3 + x^2 - 4x + 1};$

b $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4};$

c $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1};$

d $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x} - 1};$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x});$

f $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3 - x^4} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right).$