Листок 11. Предел функции

17 декабря 2022 г.

10 “В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Есть 99! бактерий. Разрешается за ход убить не больше 1% бактерий. Кто выиграет при правильной игре?

Рассмотрим множество $D \subset \mathbb{R}$ и числовую функцию $f : D \to \mathbb{R}$. Множество D называется *областью определения функции.* Если D не описано явным образом, говорят о *естественной области определения*, которая определяется как множество тех точек, в которых выражение, задающее функцию, имеет смысл.

Пусть $X \subset D$. Функция $f(x)$ называется

- **ограниченной на** X, *если* $\quad \exists C \quad \forall x \in X \quad |f(x)| < C$;
- **монотонно возрастающей на** X, *если* $\forall x, y \in X \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- **монотонно убывающей на** X, *если* $\forall x, y \in X \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
- **монотонно невозрастающей на** X, *если* $\forall x, y \in X \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- **монотонно неубывающей на** X, *если* $\forall x, y \in X \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Найдите промежутки монотонности следующих функций:

$\boxed{\text{a}}$ функции «сигнум»

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{b}}$ функции Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\boxed{\text{c}}$ функции Римана

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \quad (m, n) = 1 \\ 0, & \qquad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Определение. *Число b называется* **пределом** *функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \quad \forall x > M \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или «$f(x) \to b$ при $x \to +\infty$».

$\boxed{\mathbf{3}}$ Сформулируйте определения предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Докажите, что функция не может иметь двух различных пределов при $x \to +\infty$.

Проколотой δ-окрестностью *точки a называется объединение интервалов*

$$\overset{\circ}{U}_\delta(a) = (a-\delta;\, a) \cup (a;\, a+\delta).$$

Если во всех точках какой-нибудь проколотой δ-окрестности точки a выполняется некоторое свойство функции, то говорят, что это свойство выполняется **вблизи** *точки a.*

Определение предела функции по Коши 1. *Число b называется* **пределом функции** *$f(x)$ при $x \to a$ (или в точке a), если для любого $\varepsilon > 0$ вблизи точки a выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.*
Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или «$f(x) \to b$ при $x \to a$».

$\boxed{\mathbf{5}}$ Пусть $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Найдите $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Означает ли это, что $f(2) = 4$?

Определение предела функции по Коши 2. *Число b называется* **пределом функции** *$f(x)$ при $x \to a$ (или в точке a), если для любой ε-окрестности точки b найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, что если x находится в ней, то $f(x)$ находится в ε-окрестности точки b:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите, что определения 1 и 2 предела функции эквивалентны.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Пользуясь определением предела функции, найдите

- $\boxed{\text{a}}$ $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)$;
- $\boxed{\text{b}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$;
- $\boxed{\text{c}}$ $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}$;
- $\boxed{\text{d}}$ $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{x}$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ На окружности циферблата часов поставлены точки, соответствующие часам от 1 до 12. Отрезком соединили пары 3 и 10;, 1 и 5; 2 и 7. Докажите, что получившиеся три отрезка пересекаются в одной точке.

$\boxed{\mathbf{9}}$ На кольцевой дороге длинной 100 км через каждый километр стоит по бензоколонке. Докажите, что среди любых 51 дуг с длинами 1 км, 2 км, 3 км, ..., 51 км и концами в бензоколонках найдутся две, одна из которых содержится в другой.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Про натуральные числа p и q известно, что $\dfrac{p}{q} < \sqrt{17}$. Докажите, что

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq} < \sqrt{17}.$$