Листок 10. Число e

12 ноября 2022

10 “В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Дана последовательность $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что эта последовательность монотонна. (*Указание: воспользуйтесь биномом Ньютона.*)

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что $a_n < 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ и выведите отсюда ограниченность данной последовательности.

$\boxed{\text{c}}$ Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел.

$\boxed{\text{d}}$ Докажите, что последовательность из задачи 8e имеет тот же предел.

Число, к которому сходится последовательность из последней задачи, имеет исключительную важность как для самого анализа, так и для его приложений. По примеру Эйлера его обозначают буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045\ldots$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Найдите предел последовательности $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n+2}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ **Лемма Больцано–Вейерштрасса.** Докажите, что из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. *Указание: воспользуйтесь принципом половинного деления отрезка.*

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, *если*

$$\forall\varepsilon \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m > n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ **Принцип сходимости Коши.** Докажите, что последовательность действительных чисел сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

$\boxed{\mathbf{5}}$ * Даны два числа $a_0 > 0$, $b_0 < 0$. Пусть a_1, b_1 — положительный и отрицательный корни уравнения $x^2 + a_0x + b_0 = 0$, a_2, b_2 — положительный и отрицательный корни уравнения $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ и т.д. Докажите, что последовательности a_n, b_n сходятся и найдите их пределы.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Положительные числа x и y таковы, что $x^5 - y^3 \geq 2x$. Докажите, что $x^3 \geq 2y$.

Листок 10. Число e
12 ноября 2022
10 “В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Дана последовательность $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что эта последовательность монотонна. (*Указание: воспользуйтесь биномом Ньютона.*)

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что $a_n < 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ и выведите отсюда ограниченность данной последовательности.

$\boxed{\text{c}}$ Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел.

$\boxed{\text{d}}$ Докажите, что последовательность из задачи 8e имеет тот же предел.

Число, к которому сходится последовательность из последней задачи, имеет исключительную важность как для самого анализа, так и для его приложений. По примеру Эйлера его обозначают буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045\ldots$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Найдите предел последовательности $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n+2}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ **Лемма Больцано–Вейерштрасса.** Докажите, что из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. *Указание: воспользуйтесь принципом половинного деления отрезка.*

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной***, если*

$$\forall \varepsilon \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m > n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ **Принцип сходимости Коши.** Докажите, что последовательность действительных чисел сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

$\boxed{\mathbf{5}}$ * Даны два числа $a_0 > 0$, $b_0 < 0$. Пусть a_1, b_1 — положительный и отрицательный корни уравнения $x^2 + a_0x + b_0 = 0$, a_2, b_2 — положительный и отрицательный корни уравнения $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ и т.д. Докажите, что последовательности a_n, b_n сходятся и найдите их пределы.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Положительные числа x и y таковы, что $x^5 - y^3 \geq 2x$. Докажите, что $x^3 \geq 2y$.