

# Листок 1. Равномощность

10 “В” класс

1 сентября 2022 г.

**1** Каждый из 10 гномов либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда врёт, причём хотя бы один из гномов рыцарь. Все гномы выстроились в шеренгу, после чего девятеро сказали: “Среди стоящих слева от меня есть рыцарь”, а оставшийся, Глоин, сказал: “Среди стоящих справа от меня есть рыцарь”. Правду сказал Глоин или солгал?

**2** Докажите, что:

**a** любые два квадрата на плоскости равномощны;

**b** прямоугольник и квадрат на плоскости равномощны;

**c** любые два треугольника на плоскости равномощны.

**3** Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно отрезку  $[0, 1]$ .

*Указание.* Воспользуйтесь конструкцией “деления отрезка пополам”. Каждое число  $x \in [0, 1]$  запишите в виде бесконечной двоичной дроби следующим образом: первый знак этой дроби равен 0 или 1 в зависимости от того, попадает ли число  $x$  в левую или правую половину отрезка. Чтобы определить следующий знак, надо выбранную половину поделить снова пополам и посмотреть, куда попадет  $x$ , и т. д. В этой конструкции есть один существенный недостаток: некоторые числа имеют два представления, например, число  $0,011(0)$  — то же самое, что и  $0,010(1)$ . Попробуйте самостоятельно эту проблему разрешить.

**4** Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству пар таких последовательностей.

*Указание.* Разбейте последовательность на подпоследовательность элементов с чётными номерами и подпоследовательность элементов с нечётными номерами.

**5** Докажите, что отрезок  $[0, 1]$  равномощен квадрату  $[0, 1]^2$ .

*Указание.* Воспользуйтесь двумя предыдущими задачами.

## Листок 1. Равномощность

10 “В” класс

1 сентября 2022 г.

**1** Каждый из 10 гномов либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда врёт, причём хотя бы один из гномов рыцарь. Все гномы выстроились в шеренгу, после чего девятеро сказали: “Среди стоящих слева от меня есть рыцарь”, а оставшийся, Глоин, сказал: “Среди стоящих справа от меня есть рыцарь”. Правду сказал Глоин или солгал?

**2** Докажите, что:

**a** любые два квадрата на плоскости равномощны;

**b** прямоугольник и квадрат на плоскости равномощны;

**c** любые два треугольника на плоскости равномощны.

**3** Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно отрезку  $[0, 1]$ .

*Указание.* Воспользуйтесь конструкцией “деления отрезка пополам”. Каждое число  $x \in [0, 1]$  запишите в виде бесконечной двоичной дроби следующим образом: первый знак этой дроби равен 0 или 1 в зависимости от того, попадает ли число  $x$  в левую или правую половину отрезка. Чтобы определить следующий знак, надо выбранную половину поделить снова пополам и посмотреть, куда попадет  $x$ , и т. д. В этой конструкции есть один существенный недостаток: некоторые числа имеют два представления, например, число  $0,011(0)$  — то же самое, что и  $0,010(1)$ . Попробуйте самостоятельно эту проблему разрешить.

**4** Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству пар таких последовательностей.

*Указание.* Разбейте последовательность на подпоследовательность элементов с чётными номерами и подпоследовательность элементов с нечётными номерами.

**5** Докажите, что отрезок  $[0, 1]$  равномощен квадрату  $[0, 1]^2$ .

*Указание.* Воспользуйтесь двумя предыдущими задачами.